Årg. 29: 2 Juni 1946

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ANDRA HÄFTET

Sid.

TORSTEN JÖNSSON, Elektroniklaboratoriet vid Chalmers tekniska högskola. II 65

LENNART SMITH, Om noggrannheten av några kvantitativa kemiska undervisningsexperiment 79

G. STARCK, Aluminiumhydroxidens löslighet och olöslighet 87

V. STENSTRÖM, Om olikheter och konvexa funktioner 89

GÖSTA DANIELSSON, En olikhet för de in- och omskrivna sfärernas radier i en tetraeder 95

Bokanmälningar: TURNBULL, The Mathematical Discoveries of Newton; CARLEMAN, Lärobok i differential- och integralkalkyl; HILDING, Matematik för två betyg; BÄCKSTRÖM, Den kinematografiska filmen; STENVINKEL, Hur atombomben kommer till och verkar; CHICHESTER, Star Compass; BARTON HOAG, Basic Radio; WARD, Colloids; SMITH, Lärobok i organisk kemi; HARVEY, Recent Advances in the Chemistry and Biology of Sea Water; Nautisk meteorologi och oceanografi; The Measurement of Upper Winds etc.; Vårt dagliga ljus; Bonniers konversationslexikon 99

Gradualavhandlingar: HARRY SVENSSON, Elektrophoresis by the Moving Boundary Method; SIGVARD EKLUND, Studies in Nuclear Physics. Exitation by Means of X-Rays 108

Om enheter för massa, kraft och tryck. Cirkulär från Kungl. Skolöverstyrelsen 86

Problemavdelning:

Matematiska problem (red. av S. BÅGMAN) 113

Matematiska och fysikaliska problem i studentexamen V. T. 1946 .. 117

Realexamen V. T. 1946: Provräkning 123

Praktisk realexamen V. T. 1946: Uppgifter i fysik och Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära 124

Föredrag under våren 1946 i svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 112, 116

Tidskrifter, innehållsöversikt 127

Pris pr år kr. 8: — pr häfte kr. 2: 50

ELEMENTA

Utgivare: adjunkt C. E. Blom, professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, lektor G. Starck, och lektor A. Wahlgren. Redaktör och ansvarig utg.: C. E. Blom.

Årligen fyra häften om i regel 64 sid. (mars, juni, sept., dec.). Pris pr år kr. 8:-, pr häfte kr. 2:50. Subskription sker enklast genom inbetalning av kr. 8:- å postgirokonto nr. 527 55, då tidskr. erhålles pr utgivarekorsband. Abonnemang även genom bokhandeln.

Äldre årgångar erhållas direkt från expeditionen till följande priser: Årg. *3, 6—11, 13—16* à 6 kr. pr årg., årg. *17—28* à 8 kr. Bundna i klotband, två årg. i varje bd årg. *7—8, 9—10, 13—14, 15—16* à 14 kr. pr band, årg. *17—18, 19—20, 21—22, 23—24, 25—26* à 18 kr. pr band.

Innehållsregister till årg. *1—16* à 1 kr. och till årg. *17—24* à 1 kr.

Pärmar avsedda för två årg. till kr. 1:75 pr st.

På grund av materialbrist kunna pärmar ej tillverkas för närvarande. Pärmar till årg. 27—28 (1944—1945) finnas ej, och lagret av pärmar till äldre årg. är obetydligt. Gör förfrågan innan likvid insändes.

Särtryck ur Elementa:

1. Axel Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1:—.
2. Martin Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1:—.
4. J. Tandberg, Vinkelns tredelning. Slutsåld.
5. Gustaf Ljunggren, Gasskyddets kemi, kr. 0:80.
6. Stig Comét, Matrisräkning, kr. 1:60.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1:40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1:40.

Problemhäften: 1936 à 60 öre; *1943, 1944 och 1945* à 80 öre; med svar och anvisningar. Innehålla matem. o. fysikaliska uppg. i studentex. o. fyllnadsprövningar. Provräkn. i realex. Uppg. i fysik o. i maskin- o. byggnadslära vid praktisk realex.

Problemhäftena för åren 1937—1942 äro slutsålda.

Särtrycken sändas portofritt om inbetalning sker å tidskriftens postgiro 527 55 (skriv rekvisition å girokupongen). Även genom bokhandeln.

Redaktion och expedition: C. E. Blom, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.

BAND 24

AV

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS PUBLIKATION

KOSMOS

har utkommit med följande innehåll:

1. Inför C. W. Oseen och hans verk av professor E. Hogner . .
2. Wolfgang Pauli av fil. dr Anna Beckman . . . . . .
3. Otto Hahn av fil. dr Anna Beckman . . . . . .
4. Nyere Undersøgelser over Atomkernernes Omdannelser av professor Niels Bohr . . . . . .
5. Transuraner av professor John Tandberg. . . . . .
6. Ur urans kemi av docent Lars Gunnar Sillén. . . . . .
7. Urantillgångar och energiförsörjning av geologen Josef Eklund
8. Undersökningar över aktiva isotoper av docent Kai Siegbahn
9. Kärnfysik i biologi och medicin av med. dr Richard F. Öhnell
10. Vad är en utbyteskraft? av docent Nils Svartholm . . . .
11. Betatronen av civilingenjör Olle Wernholm . . . . . .

Då Kosmos innehåller orienterande framställningar över aktuella problem inom den fysikaliska forskningen, torde den vara av *värde i synnerhet för alla fysiklärare och borde ej saknas i något skolbibliotek.*

Boken tillställes samfundets medlemmar *inbunden* jämte medlemsförteckning och kvitto på medlemsavgift som postförskottsförsändelse à Kr. 10:—. Medlemskap erhålles efter hänvändelse till *fil. dr fru Anna Beckman, Lilljeborgsvägen 3, Uppsala.* Även institutioner och bibliotek ävensom personer, institutioner och bibliotek i de övriga nordiska länderna antagas som medlemmar.

Medlemmar i samfundet kunna i mån av tillgång erhålla bundna exemplar av band 1 samt 3—8 för högst 5 kr. pr styck och av band 9—23 för 10 kronor pr styck inkl. porto.

Ny tavla över

GRUNDÄMNENAS PERIODISKA SYSTEM

utarbetad av

fil dr Anna Beckman

Format 95×132 cm
Pris för ouppf. ex. 9:50, på väv 24:— kr.

P. A. NORSTEDT & SÖNER
Skolavdelningen - Stockholm

Insänd litteratur.

MARTIN JOHNSON, *Time, Knowledge and the Nebulea*, Faber & Faber, London 1945, Pp. 189. 12 s. 6 d.

THORLEIF JOHANSEN, *Matematikken i oldtiden*, Aschehoug & Co, Oslo 1945, 106 s., kr. 6: 75.

N. O. BERGQUIST, *En kollision i världsrymden och dess följder*, Gebers förlag, Stockholm 1946, 115 s., kr. 4: —.

C. E. SJÖSTEDT, *Matematisk formelsamling*, Natur och Kultur, Stockholm 1946, 151 s., kr. 4: 75.

Gleerups skolbibliotek, Gleerups förlag, Lund 1946: Nr. 4. G. LINGEGÅRD, *Hur man spår väder*, 24 s., kr. 0: 70. Nr. 5. G. LÜCKLIG och TH. PETERSON, *Glas*, 37 s., kr. 1: 10.

Meddelanden från Statens Meteorologisk-hydrografiska anstalt Bd. 7: Nr 11 och 12, *De svenska vattendragens arealförhållanden*, Mälaren—Norrström m. fl. resp. Vättern—Motalaström m. fl.

Tekniska meddelanden från Kungl. Telegrafstyrelsen, 1945: 2—4; 1946: 1 samt *Specialnummer för Teletrafikteknik*, av C. PALM, (maj 1946).

The School Science Review, London 1946: March.

Euclides, Groningen, Holland, 1945—46: 3—4.

Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel XX: 4; XXI: 1—4; XXII: 1; 1940—1943, Noordhoff, Groningen, Holland.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, Deel 17: 4, 5, 18: 1; 1941—43, Noordhoff, Groningen, Holland.

O. CYRÉN, *Svensk kemisk industri*, Bonniers, Stockholm 1946, 350 s., inb. kr. 17: 50 (I serien Tekniskt Folkbibliotek).

F. WIGFORSS, *Matematisk statistik för pedagoger*, 2:a uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt), 1946, 94 s., kr. 4: 50.

V. BERGLUND, *Hantverkskalkylering*, Sv. Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1946, 107 s., kr. 3: —.

E. ÖIJE, *Läraren, lärjungen, allmänheten*, Sv. Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1946, 74 s., kr. 1: 85.

BECKMAN-WETTERBLAD, *Fysik*, Andra årskursen, 2:a uppl., 3:e tryckn. Sv. Bokförlaget (Bonniers), Stockholm 1945, 167 s., kr. 2: 35.

Teknisk Bokkatalog 1946, utg. av H. Lindståhls Bokhandel, Stockholm, 38 s.

Elektroniklaboratoriet vid Chalmers tekniska högskola. II.

Av TORSTEN JÖNSSON.

5. Allmänna operationer vid tillverkning av elektronrör.[1]

För belysning av de allmänna operationer, som alltid måste utföras vid tillverkning av elektronrör, välja vi som exempel framställningen av ett rör av allra enklaste slag, nämligen en mindre triod med nickelanod samt glödtråd och galler, vilka äro placerade inuti anoden (fig. 10). Vi låta glödtråden vara av en ren metall, t. ex. volfram, enär vi vilja redogöra för de fysikaliskt mera komplicerade belagda katoderna längre fram. Vidare utgå vi ifrån, att standarddetaljer av lämplig beskaffenhet finnas tillgängliga för rörets uppbyggande. Elektronikens materiallära måste nämligen behandlas i ett särskilt avsnitt.

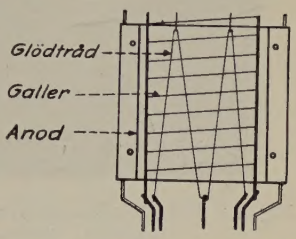


Fig. 10. Elektrodsystemet i en enkel triod.

Rörets elektrodsystem bygges upp på en s. k. klämfot av glas (fig. 11), försedd med insmälta tilledningstrådar och metallstavar. På Elektroniklaboratoriet bruka vi tillverka klämfötterna själva, endast när det gäller att bygga större specialrör. I fråga om mindre rör är det i de flesta fall enklast och billigast att använda rörfabrikernas klämfötter, som kunna erhållas i flera olika storlekar och med varierande antal stag och tilledningstrådar. Elektroderna svet-

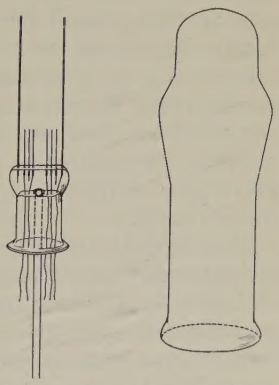


Fig. 11. Exempel på klämfot och glasballong till elektronrör.

[1] Forts. från årg. *28* (1945), s. 156.

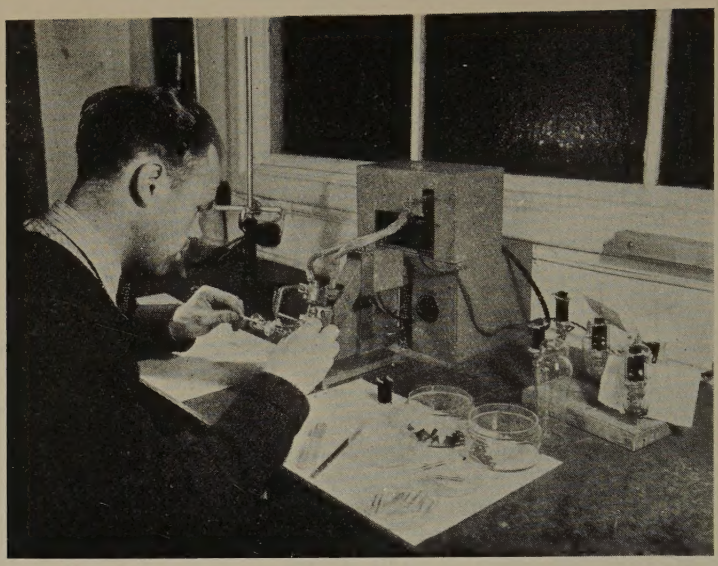


Fig. 12. Punktsvetsning. Svetsapparatens elektroder manövreras medelst fotpedal. Strömstyrka och tid äro reglerbara.

sas fast medelst elektrisk punktsvetsapparat (fig. 12). Lödning duger inte. Vid arbetet måste största renlighet iakttagas; man arbetar med pincett, och man bör så långt möjligt undvika att beröra detaljerna med bara händerna. På klämfoten fastsättes också en s. k. gettertablett. Det vanligaste gettermaterialet är barium (mera härom längre fram). Man kan t. ex. använda nickelrör av ett par mm inre diameter, fyllda med barium. En liten bit klippes av och fästes på en nickelplatta, som i sin tur fastsättes på klämfotens nedre del så, att tabletten kommer att vetta från elektrodsystemet.

Den sålunda påbyggda klämfoten inskjutes nu i en passande glasballong, varefter klämfotens glaskant smältes fast vid ballongen i en s. k. glassvarv (fig. 13). Kanten kommer ungefär på mitten av ballongens cylindriska del. Glasballonger av olika storlek och form kunna erhållas från rörfabrikerna eller från glasbruk, som specialiserat sig på dylik tillverkning.

Röret smältes nu på pumpstationens gaffel (fig. 1, 2, 14), och evakueringen påbörjas. Först måste de gaser avlägsnas, som sitta adsorberade på glasballongens insida. Detta sker genom uppvärmning i stationens elektriska ugn (fig. 1—2), som sänkes ner över

Fig. 13. Glassvarv. Röret roterar långsamt, medan ballongen smältes på medelst två diametralt placerade blästerbrännare.

röret. Ugnstemperaturen stegras långsamt. Gasskiktet, som huvudsakligen utgöres av vatten, koldioxid, koloxid och väte, försvinner till största delen mellan 150 och 200°C. Den slutliga monomolekylära filmen går bort vid en temperatur något under 400°C (något olika för olika glassorter). Emellertid får ugnstemperaturen inte bli mycket högre. Vanligt apparatglas mjuknar vid ca 425°C (hårdglas vid 550°C, blyglas redan vid 360°C). Ofta börjar glaset självt att gasa genom sönderdelning redan innan mjukningstemperaturen uppnåtts. Man har sålunda vanligen att röra sig inom ett ganska snävt temperaturintervall. Ugnsuppvärmningen fortsättes, till dess att McLeodmanometern visar klibbvakuum (se avsnitt 4). Först då är gasfilmen med säkerhet avlägsnad. Ugnen får därefter långsamt svalna och tages bort, när temperaturen gått ner till ca 80°C. Ugnstemperaturen skall stegras resp. sänkas långsamt, enär röret eljest lätt kan spricka. Ugnsbehandlingen brukar taga flera timmar i anspråk. Fullt effektiv ugnsbehandling kan, i förbigående sagt, inte alltid genomföras. Detta gäller särskilt sådana fall, då röret innehåller kemikalieskikt, som skulle reagera olämpligt vid den höga temperaturen (t. ex. fotoceller). Man får då klara sig på annat sätt.

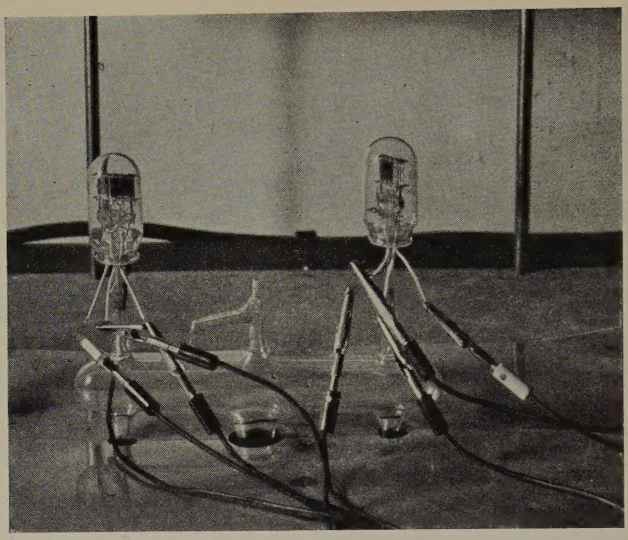


Fig. 14. Rör under behandling på pumpen.

Nästa moment är urgasningen av elektroderna. Metaller binda avsevärda gasmängder, volfram t. ex. vid vanlig temperatur 3—4 gånger sin egen volym, mätt under normala förhållanden. Enär den temperatur, vid vilken metalldelarna avge sina absorberade och adsorberade gaser (nickel ca 800°C, volfram ca 1800°C) ligger avsevärt över glasets mjukningstemperatur, så kan denna urgasning inte ske i ugn. Olika metaller urgasas olika lätt, vilket man måste taga hänsyn till vid valet av material för elektroder, stag etc. Man kan inte räkna med att fullständigt befria metalldelarna från gas, men man måste upphetta dem så kraftigt, att ingen nämnvärd gasning äger rum vid den temperatur, som elektroderna utsättas för vid rörets normala drift. Ett allmänt använt sätt att underlätta urgasningen är att i förväg glödga metalldelarna i vätgasatmosfär, varvid kristallgittret fylles med vätgas, som sedan är förhållandevis lätt att driva ut vid pumpningen.

De ytligt belägna metalldelarna, i vårt exempel anoden, urgasas medelst högfrekvens. Härför användes en s. k. bombarder, som helt enkelt är en vanlig rörsändare (fig. 15). Elektroniklaboratoriets bombarder är ett flyttbart aggregat på hjul. Våglängden är ca 450 m. Högfrekvensenergien överföres medelst kabel till en på ett handtag monterad svängningskrets, bestående av en spole av kop-

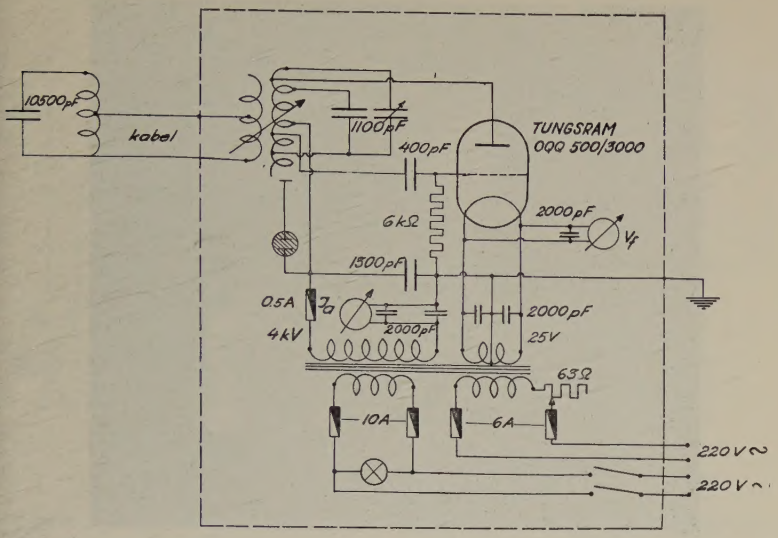


Fig. 15. Bombarder. Kopplingsschema.

parrör samt keramiska plattkondensatorer (de senare av Gustavsbergs tillverkning). Strömstyrkan i svängningskretsen är normalt ganska stor, ca 60 amp. Då den högfrekventa strömmen ju går i ledarens ytskikt, måste detta vara bra ledande, och därför är spolen försilvrad. Utan försilvring skulle spolen till följd av uppvärmningen oxideras på ytan, vilket på grund av kopparoxidens dåliga ledningsförmåga skulle medföra en minskning av den uttagbara effekten. Spolen är tillverkad av rör, så att den vid behov kan kylas med vatten eller tryckluft.

Spolen med den högfrekventa växelströmmen placeras nu omkring röret (fig. 16). Härvid induceras strömmar i anoden, vilka uppvärma denna. Upphettningen bör vid mindre rör drivas till en temperatur av 750—800°C, dvs. till ungefär körsbärsröd färg. I kinkiga fall kontrolleras temperaturen med pyrometer. Upphettningen får inte ske kontinuerligt utan stötvis, så att pumpen hinner bortföra de avgivna gaserna, efterhand som de lämna metallen. I annat fall kommer en del av de avgångna gaserna att adsorberas på glasballongens innervägg. Gasningens styrka kan vid kraftigare gasning bedömas med ledning av intensiteten hos den lysande urladdning, som högfrekvensfältet ger upphov till. Den stötvisa upphettningen fortsättes, tills klibbvakuum erhållits.

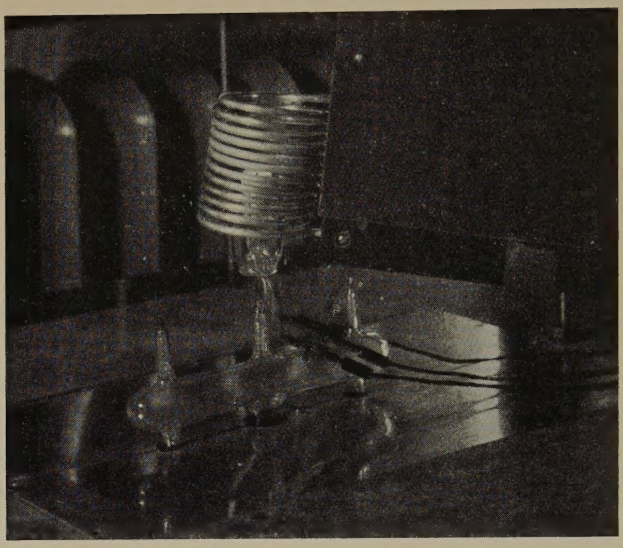


Fig. 16. Högfrekvensupphettning.

Anodens form är av väsentlig betydelse för dess förmåga att »dra effekt». En med spolen koaxial, cylindrisk anod är lättast att upphetta. En slitsad cylinderanod eller en tillplattad anod är betydligt svårare att värma upp. Kopplingen mellan spole och anod bör vara så fast som möjligt, varför spolen bör ha minsta möjliga diameter. Man har därför bombardern utrustad med en serie utbytbara spolar, så att man alltid kan välja en spole, som endast nätt och jämnt går över röret. Vid behandlingen får spolen inte föras så långt ner, att gettertabletten blir het.

De av anoden avskärmade metalldelarna (glödtråden och gallret) påverkas inte av högfrekvensen. Dessa avgasas därför genom s. k. strömbehandling, dvs. strömgenomgång resp. elektronbombardemang (fig. 2, 17). Glödtråden tillföres så stark ström, att temperaturen blir ca 1800°C (för volframglödtråd), dvs. några hundra grader över den normala driftstemperaturen. Vid denna temperatur är glödtråden kraftigt elektronemitterande. Anod och galler sammankopplas nu och tilldelas över ett lämpligt förkopplingsmotstånd positiv spänning. Härvid stiger strömstyrkan genom röret först långsamt och därefter snabbare, enär rörets inre motstånd minskas genom tryckökningen till följd av att gas frigöres. Om emellertid strömstyrkan blir för stor, måste spänningen kopplas bort, enär

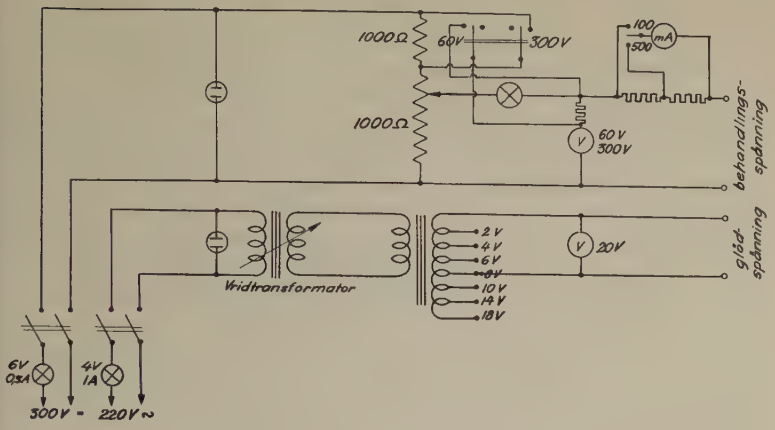


Fig. 17. Anordning för strömbehandling av elektronrör.

eljest röret kan förstöras genom ljusbågebildning mellan elektroderna (ett jonrör har ju negativ karakteristik). Vidare måste man sörja för att jonbombardemanget mot katoden inte blir så intensivt, att nämnvärd katodförstoftning uppstår. Av samma skäl som ovan bör behandlingen ske stötvis. I början är den synliga urladdningen jämförelsevis kraftig, och en stor del av energien förbrukas för jonisering av gasen, men efterhand avtar den, samtidigt som gallertrådarnas och anodens temperatur stiger genom att elektronbombardemanget blir intensivare. Behandlingen fortsättes, till dess att vid rödglödning (ca 800°C) den synliga urladdningen försvunnit och manometern visar klibbvakuum. Därigenom att även anoden och inte bara gallret elektronbombarderas, uppnås att de av gallret frigjorda gaserna inte upptagas av den urgasade anoden. Självfallet är det inte nödvändigt och i många fall inte heller lämpligt att elektronbombardera anod och galler med samma spänning. I de fall, då röret är försett med metallmantel, kan anoden inte urgasas medelst högfrekvens, varför urgasningen måste ske helt och hållet medelst strömbehandling.

Efter strömbehandlingen verkställes gettring. Gettertabletten upphettas medelst högfrekvensspolen till 700—800°C, varigenom bariummetallen snabbt förångas och slår sig ner på glasväggen och bildar en silverliknande spegel. Beslaget binder i bildningsögonblicket huvudparten av den kvarvarande gasresten, varjämte det har förmåga att under avsevärd tid adsorbera gaser, som senare frigöras från elektroderna i röret. Gettertabletten måste givetvis

vara placerad så, att beslaget inte kan träffa elektroderna eller kortsluta tilledningstrådarna. Gettringen är i förbigående sagt en så effektiv evakueringsmetod, att man vid masstillverkning av mottagarerör ofta nöjer sig med att använda förpumpar och litar på att gettret skall ge erforderligt slutvakuum. Man har inte större fordran på vakuum i dylika rör än att trycket under en normal livstid på ca 2000 timmar inte skall överskrida 10^{-4} mm Hg. Fria medelväglängden håller sig då över 70 cm (tab. 1, avsnitt 3), vilket är betryggande (jonisationssannolikheten liten).

Å andra sidan är gettring inte absolut nödvändig, om behandlingen i övrigt skett under pumpning med en god diffusionspump,[1] men utföres dock i allmänhet för säkerhets skull.

Röret avsmältes nu från pumpen. Härvid bildas naturligtvis en del gas genom sönderdelning av glas vid avsmältningsstället, men denna bindes av getterbeslaget. Man kan också verkställa gettringen efter avsmältningen, om ett så effektivt getter som barium användes.

Slutligen skall röret socklas. I vårt fall kunna vi använda en standardsockel, i vilken röret kittas fast. Ett bra sockelkitt erhåller man genom att lösa schellack i alkohol i viktsförhållandet 1:1 samt röra i gips, tills man får en lagom tjock gröt. Det kittade röret uppvärmes långsamt i värmeskåp till 180°C. Efter 10—12 minuter vid denna temperatur har kittet hårdnat.

Som sista operation lödas tilledningstrådarna fast i resp. sockelstift. Röret är därefter färdigt för provning.

6. Något om rena metallers termiska elektronemission.

Numera äro de belagda katoderna av vida större betydelse än glödkatoder av rena metaller.[2] Metoderna för dessa katoders framställning och »aktivering» förefalla ganska gåtfulla, innan man studerat det fysikaliska underlaget för deras verkningssätt. Katodforskningen, som är synnerligen fascinerande, har först på senare år genom tillkomsten av elektronmikroskopet fått fast mark under fötterna. Tidigare var de belagda katodernas teknik mest ren receptkonst.

[1] Sedan förra delen av uppsatsen tryckts, kom till förf:s kännedom, att den amerikanska firman Distillation Products konstruerat en oljediffusionspump, som ger ett slutvakuum av 10^{-9} mm Hg. Ett exemplar av denna pump, som är helt utförd i glas, har hittills anlänt till Elektroniklaboratoriet.

[2] Glödtrådar av ren metall (i praktiken alltid volfram) användas numera huvudsakligen i gasurladdningsrör samt större rör, såsom röntgenrör och stora sändarrör och likriktarrör.

Emellertid torde det vara nödvändigt att låta behandlingen av de belagda katodernas fysik och teknik föregås av en redogörelse för det väsentligaste av teorien för rena metallytors elektronemission.

Med en ren metallyta förstår man en sådan yta, som inte är förorenad av några som helst atomer eller joner, tillhörande andra ämnen.

Enligt Fermi-Dirac-statistiken är per cm³ metall antalet »fria» elektroner (elektricitetslärans »ledningselektroner») med impulskomponenterna belägna i intervallet $(p_x,\ p_y,\ p_z) - (p_x + dp_x,\ p_y + dp_y,\ p_z + dp_z)$ bestämt av fördelningslagen [1]

$$dN = \frac{G}{h^3} \cdot \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{\frac{\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - E_0}{kT}} + 1},$$

där G är antalet elektroner, som belägga högsta energibandet i metallen, h Plancks konstant, k Boltzmanns konstant, m elektronens massa, T absoluta temperaturen och E_0 den s. k. gränsenergien, dvs. de snabbaste elektronernas energi vid absoluta nollpunkten. Talet G kan sättas $= 2$, då för de metaller, som i praktiken komma i fråga för elektronemission, det högsta belagda energibandet är ett s-band. Vid normala temperaturer är e-potensen $\gg 1$ (t. ex. vid 3000°K ca 40 miljoner), varför 1:an i nämnaren kan försummas, och man får

$$dN = \frac{2}{h^3} \cdot e^{\frac{E_0}{kT}} \cdot e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z. \qquad (12)$$

Då vidare $p_x = mv_x$ etc. (v_x = hastighetskomposanten i x-riktningen), kan man, om m antages konstant $= m_0$, skriva fördelningslagen:

$$dN = \frac{2m_0^3}{h^3} \cdot e^{\frac{E_0}{kT}} \cdot e^{-\frac{m_0}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z.$$

Vi lägga nu x-axeln vinkelrätt mot gränsytan metall-vakuum (fig. 18). Beteckna vi med dN_x antalet elektroner per cm³, som ha en hastighetskomposant mellan v_x och $v_x + dv_x$, få vi, då dessa elektroner ha alla hastigheter mellan $-\infty$ och $+\infty$ i de övriga riktningarna, att

$$dN_x = \frac{2m_0^3}{h^3} \cdot e^{\frac{E_0}{kT}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-\frac{m_0}{2kT}(v_y^2 + v_z^2)} dv_y dv_z.$$

[1] I de följande räkningarna antagas alla storheter uttryckta i elektrostatiska C. G. S.-enheter.

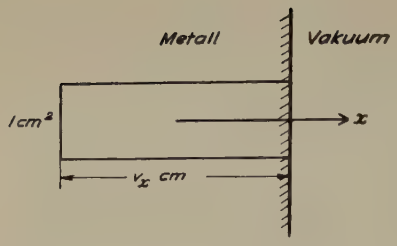


Fig. 18. I cylindern finns $dN_x \cdot v_x$ elektroner med hastighetskomposanten v_x.

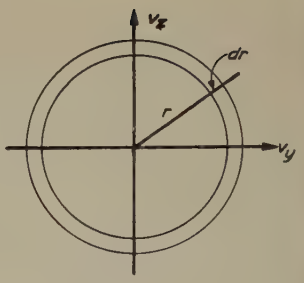


Fig. 19.

Dubbelintegralen är (fig. 19) formellt lika med integralen

$$\int_0^\infty e^{-\frac{m_0}{2kT} \cdot r^2} \cdot 2\pi r dr, \text{ som är } = \frac{2\pi kT}{m_0},$$

varför

$$dN_x = \frac{4\pi k m_0^2}{h^3} \cdot T \cdot e^{\frac{E_0}{kT}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} dv_x.$$

I en cylinder med basytan 1 cm² och höjden v_x cm finns $dN_x \cdot v_x$ elektroner med hastighetskomposanten v_x. Om dessa elektroner kunna lämna metallytan, sker detta på tiden 1 sek, varför deras bidrag till emissionsströmtätheten blir

$$di_s = \varepsilon \cdot dN_x \cdot v_x, \tag{13}$$

där ε är elektronens laddning. Man får alltså:

$$di_s = \frac{4\pi k \varepsilon m_0^2}{h^3} \cdot T \cdot e^{\frac{E_0}{kT}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} v_x dv_x. \tag{14}$$

Nu kunna emellertid inte alla elektroner, som ha en hastighetskomposant vinkelrät mot gränsytan, lämna denna. Den experimentella erfarenheten visar, att vid lägre temperatur förekommer ingen elektronemission. Det måste alltså existera något, som håller elektronerna kvar. Man säger, att det utanför ytan finns en potentialbarriär, som elektronerna inte ha tillräcklig energi för att kunna komma över. Existensen av denna barriär kan förklaras sålunda. Då en elektron lämnar ytan, induceras på denna en lika stor positiv

influensladdning. Enligt den klassiska elektrostatiken utövar denna influensladdning samma attraherande verkan på elektronen som en punktladdning, vilken är placerad i elektronens spegelbild (fig. 20), dvs. den s. k. bildkraften är $= \frac{\varepsilon^2}{4x^2}$. Då emellertid $\frac{\varepsilon^2}{4x^2} \to \infty$, när $x \to 0$, kan kraftfunktionen inte representeras av detta uttryck, då elektronen är mycket nära jongittret, eftersom ju elektronen är fri, då den befinner sig inuti gittret. Kraftfunktionen måste därför gå mot 0, när $x \to 0$ (fig. 21). Bildkraften verkar på hur stort avstånd som helst, men den avtar kvadratiskt; man kan räkna ut, att den på 10^{-6} à 10^{-5} cm avstånd är så liten, att elektronen praktiskt kan betraktas som fri. Den till kraftfunktionen hörande funktion, som framställer elektronens potentiella energi, åskådliggöres i fig. 22.

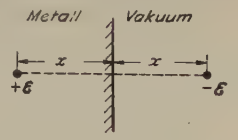


Fig. 20.

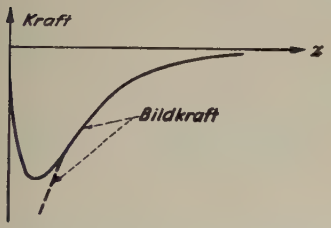


Fig. 21. Kraften på en elektron, som lämnar metallytan (vid frånvaro av yttre fält).

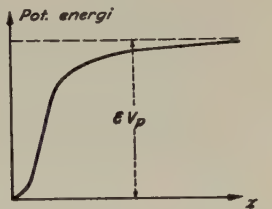


Fig. 22. Potentiella energikurvan, motsvarande kraftkurvan i fig. 21. Potentiella energien på oändligt avstånd är εV_p.

För att elektronerna skola kunna lämna ytan, måste deras kinetiska energi inuti metallen minst vara $= \varepsilon V_p$. Då E_0 alltid är mindre än εV_p, måste elektronerna tillföras energi utifrån, för att emission skall bli möjlig. Detta kan ske på olika sätt, bl. a. genom metallens upphettning.

Villkoret för emission blir

$$\tfrac{1}{2} m_0 v_x^2 \geq \varepsilon V_p, \tag{15}$$

dvs. endast elektroner med hastigheter från $\sqrt{\frac{2\varepsilon V_p}{m_0}}$ och uppåt kunna lämna ytan. Vi få sålunda till slut genom integration av (14):

$$i_s = \frac{4\pi k \varepsilon m_0^2}{h^3} \cdot T \cdot e^{\frac{E_0}{kT}} \int_{\sqrt{\frac{2\varepsilon V_p}{m_0}}}^{\infty} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} v_x dv_x = \frac{4\pi k^2 \varepsilon m_0}{h^3} \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon V_p - E_0}{kT}},$$

som kan skrivas

$$i_s = AT^2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon \Phi}{kT}}. \qquad (16)$$

Detta är *Richardsons modifierade emissionsformel* (T^2-*lagen*),[1] som först härleddes av *Dushman*.

Strömtätheten har betecknats i_s, emedan formeln även anger mättningsströmtätheten (*s* är förkortning av »saturation») i en diod, dvs. den strömtäthet man får, om spänningen på anoden är tillräckligt hög för att dra över alla emitterade elektroner.

Beräknar man storheten *A*, som innehåller endast universella konstanter, får man värdet 120,4 amp/ (cm.°K)², under det att man experimentellt finner värden omkring 60. Åtskilliga teorier ha utvecklats för att förklara denna diskrepans, men hittills har man inte lyckats tillfredsställande härmed.

Storheten Φ kallas metallens *utträdesarbete*.

Tab. 2. Emissionskonstanter.

Element	*A*	Φ
C	30	4,3—4,7
Ca	60,2	2,2—3,2
Cs	162	1,8
Mo	60,2	4,3—4,4
Ni	26,8	2,8—5,0
Pt	32	5,3—6,0
Ta	60,2	4,1
Th	60,2	3,4
W	60,2	4,52

I tab. 2 anges de experimentellt bestämda värdena på *A* och Φ (den senare i volt) för några metalliska ledare.

De värden på Φ, som erhållits av olika forskare, variera ganska mycket beträffande några element. Detta torde sammanhänga med svårigheten att åstadkomma fullkomligt rena metallytor. Främmande ämnens inverkan på utträdesarbetet är nämligen mycket stor, och inverkan av sådana kan medföra såväl ökning som minskning av detta.

Eftersom härledningen av emissionsformeln (16) är fullt generell, borde *A* ha samma värde för alla rena metaller. I fråga om de bäst undersökta elementen har man funnit värdet 60,2, som är precis hälften av det teoretiska. Man har försökt förklara detta vågmekaniskt; en del elektroner förmodas undergå reflexion mot potentialbarriären.

[1] Richardsons ursprungliga formel ($T^{1/2}$-lagen) har faktorn $T^{1/2}$ i stället för T^2 men är i övrigt av samma form. Den framgår, om man antar, att elektronernas hastighetsfördelning är Maxwellsk.

Som framgår av emissionsformeln är förutsättningen för att man skall få stor emission, att temperaturen är hög och utträdesarbetet litet. Härvid spelar exponentialfaktorn den största rollen. Om man t. ex. ökar temperaturen på en volframglödtråd från 2200°K till 2300°K, så 3-dubblas emissionen. (Vid 2200°K är emissionen 13,2 mA/cm².)

Av de metaller, som tåla kraftig upphettning, är volfram den billigaste, och därför är också volfram den enda metall, som i praktiken kommer till användning för rena glödtrådar.

Metallglödkatoderna ha stor effektförbrukning, vilket ur flera synpunkter är en betydande olägenhet.

Vid *experimentell bestämning av emissionskonstanterna* för en metall använder man i allmänhet tunna trådar eller band. Glödtråden uppspännes axialt i en tredelad cylindrisk anod.[1] De båda yttre anoderna, som äro förbundna med varandra, täcka över de vid lägre temperatur befintliga ändarna av glödtråden. Den mellersta anoden befinner sig omkring mittpartiet av glödtråden, vilket kan anses ha konstant temperatur. Vid mätningen av mättningsemissionsströmstyrkan lägges samma spänning på alla tre anoddelarna, men endast strömmen till den mellersta anoden mätes. Genom detta arrangemang uppnås, att mätresultatet inte förfalskas av fältdeformationer i det egentliga mätsystemet eller temperaturskillnader utefter glödtråden.

Eftersom föroreningar ha en mycket betydande inverkan på utträdesarbetet, måste man vid tillverkningen av mätröret tillgripa vakuumteknikens alla hjälpmedel, så att man verkligen får en ren katodyta.

Mycket noggranna värden på emissionskonstanterna kunna utan vidare erhållas endast för metaller med hög smältpunkt (såsom *W, Mo, Ta*), enär endast sådana låta sig urgasas tillräckligt utan att smälta eller förgasas. Invändningsfria katoder av metaller med låg smältpunkt (t. ex. *Ba*) kunna framställas på så sätt, att man genom förångning av en metalltablett i det evakuerade röret belägger en lämplig underlagsmetall med metallen i fråga. Platina, som är särskilt svår att urgasa, kan rengöras genom bombardemang med argonjoner.

Den närmast till hands liggande bestämningsmetoden är den s. k. »*metoden med Richardsons räta linje*». Logaritmeras (16), fås

$$ln \frac{I_s}{T^2} = -\frac{\varepsilon \Phi}{k} \cdot \frac{1}{T} + ln(AF), \qquad (17)$$

där I_s är mättningsströmstyrkan och F katodens effektiva yta.

[1] Den följande framställningen har tillskrivits i korrekturet; tiden har inte medgivit införande av figurer.

Sålunda ger $ln \frac{I_s}{T^2}$, uppsatt mot $\frac{1}{T}$, en rät linje med vinkelkoefficienten $= \frac{\varepsilon \Phi}{k}$ och avskärningen på ordinataxeln $= ln\ (AF)$.

Emellertid får man på detta sätt reda på Φ vid den förhandenvarande anodspänningen. Utträdesarbetet är nämligen mindre vid närvaro av yttre fält, eftersom ju ett sådant motverkar bildkraften. Yttre fältets inverkan på utträdesarbetet kan enkelt beräknas vid högre fältstyrkor, men en extrapolation till fältstyrkan noll utfaller inte särskilt noggrant.

Storheten A kan inte bestämmas särskilt noggrant med denna metod. Felet i temperaturmätningen kan knappast göras mindre än 1 %, vilket *kan* medföra ett fel i A på ca 50 %. Vidare kan den effektiva katodytan F heller inte bestämmas med särskilt stor noggrannhet. Den elektronemitterande ytan är nämligen till följd av små ojämnheter alltid större än den geometriskt uppmätta. Flera andra felkällor finnas, varför värdena på A bli osäkra.

En annan metod för bestämning av Φ består i mätning av den s. k. *avkylningseffekten*. För att en elektron skall emitteras, måste den tillföras energi, som går åt dels till att övervinna utträdesarbetet och dels till att ge elektronen en viss utgångshastighet. Denna energi tages från det katoden tillförda värmet. Vid inkopplingen av emissionsströmmen avkyles därför katoden så mycket, att minskningen av dess utstrålade energi blir lika med den för elektronemissionen erforderliga energien. Storleken av denna avkylning är alltså, förutsatt att mättningsström föreligger i röret, bestämd av utträdesarbetet och av den energi, som elektronerna ha vid utträdet i form av kinetisk energi, vilken senare kan beräknas; den är genomsnittligt $2kT$ erg/elektron. Minskningen i strålningseffekt, W erg/sek, kan skrivas

$$W = I_s \cdot \Phi + 2I_s \frac{kT}{\varepsilon}. \qquad (18)$$

Avkylningseffekten kan mätas ganska noggrant.

Vidare kan Φ bestämmas genom mätning av *kontaktpotentialen* mellan katod och anod, vilken är lika med skillnaden mellan utträdesarbetena för katodmetallen och anodmetallen. Om sålunda endera elektrodens Φ-värde är känt, kan den andras bestämmas.

Lagarna för *fotoelektronemission* ge flera metoder för bestämning av Φ, som slutligen även kan bestämmas med hjälp av den s. k. *fältemissionen*, dvs. den elektronemission, som äger rum från kalla katoder vid anläggning av starka elektriska fält ($> 10^7$ volt/cm).

(Forts.)

Om noggrannheten av några kvantitativa kemiska undervisningsexperiment.

Av LENNART SMITH.

Vid genomgång av protokollen vid de senaste årens kurser i kemiska undervisningsexperiment i Lund gjorde jag mig den frågan om icke en bearbetning av siffermaterialet kunde ha ett mera allmänt pedagogiskt intresse.

De protokoll, som det är fråga om, föras av övningsledare av olika slag — assistenter, amanuenser, docenter — vilka under försökens gång kontrollera avläsningar av olika slag så pass ingående, att alla siffror måste anses fullt vederhäftiga. Då nämnda kurser vidare äro förlagda till slutet av utbildningen för kandidat- resp. ämbetsexamen, har eleven övriga kurser bakom sig och kan därför sägas vara en utbildad, om än icke tränad kemist. Hans försöksresultat få i varje fall anses fria från elementära fel.

Protokollen omfatta inalles försök från åtskilliga år. Av detta stora material har jag fått nöja mig med att utvälja ett relativt litet antal protokollappar för vidare bearbetning. Hur bearbetningen av dessa skall ske kan ju vara tveksamt.

Undersökning av noggrannheten av en försöksmetodik sker väl i regel så, att en experimentator för att vänja sig vid metodiken först gör några förförsök, vilkas resultat han förkastar, därför att de kunna vara behäftade med fel, som icke ha med försöksmetodikens användbarhet i och för sig att skaffa. Först därefter skrider han till utförande av den egentliga försöksserien, vars resultat sedan statistiskt bearbetas. Ett dylikt tillvägagångssätt kan inte komma ifråga här, eftersom tillfälle till förövning i regel icke gives — undantag bilda vissa enkla experiment, t. ex. titreringar. Följden härav blir, att många försök bli underkända vid första uppvisningen, icke på grund av bristande experimentell skicklighet hos eleven utan på grund av bristande vana vid metodiken. I så fall kunna för denna ovidkommande fel varit utslagsgivande. Felen bli ofta abnormt stora. Å andra sidan blir, om en underkänd grupp — de studerande arbeta i regel parvis — efter ytterligare en eller två uppvisningar når tillfredsställande resultat,

detta icke jämförligt med de gruppers resultat, som godkänts vid sitt första försök. Den förstnämnda gruppen har nämligen nått sitt resultat efter en viss övning.

Resultaten från de vid första uppvisningen underkända grupperna äro sålunda så pass olikartade till sin beskaffenhet att det icke kan vara befogat att bearbeta dem tillsamman, medan det å andra sidan nu efteråt icke går att skilja dem i olika grupper. Jag har därför beslutat mig för att utesluta dem vid en första beräkning av medelvärdena [1] men efteråt gjort en överslagsberäkning av denna uteslutnings inverkan på medelvärdet av försöksresultatet. En sådan uteslutning var också lämplig av den orsaken att för dessa grupper flera anteckningar för samma försök finnas i protokollen, vilket ofta medför att dessa är svåra att dechiffrera med säkerhet.

Ett sådant tillvägagångssätt är kanske statistiskt oberättigat. Endast i den mån den i första omgången godkända procenten av samtliga försök (»gk %» nedan) närmar sig 100, kan det försvaras. I 14 st av försökstyperna var medelvärdet av gk % 82, (icke under 70 % i något fall) i 2 st omkring 60 och i ett fall 50. Då vidare en del av de misslyckade försöken måste skrivas på kontot för slarv, ovana eller okunnighet, minskas ytterligare det antal, som verkligen utförts i enlighet med anvisningarna, men ändå fallit utanför felgränsen. Det nyss angivna medelvärdet för gk % blir i så fall kanske 90 % eller mer. Försökstyperna med 60, resp. 50 som värden på gk % ha beräknats som de övriga för att tjäna som jämförelsematerial. Värdena på *e* (medelfel hos enstaka försök) ha satts inom parentes.

Med ovan angivna reservation för bearbetningens riktighet gäller alltså, att godkändsprocenten angiver hur stor del av eleverna, som vid första försöket uppnått den noggrannhet, som svarar mot det beräknade medelfelet (*e*). Ett lagom högt värde på gk % visar alltså, att gränserna för godkändsrayonen äro lämpligt valda. Är gk % åter = 100, kan det vara berättigat att fråga sig, om icke felgränserna varit för vida. Medelvärdena av försöksresultaten ge uttryck för huruvida systematiska fel vidlåda metoden eller icke — n. b. i händerna på en kemist, som förut icke är förtrogen med densamma.

För utförandet av experimenten, som till stor del äro de kända klassiska, redogöres i all korthet nedan. Noggrann beskrivning återfinnes i författarens lärobok i undervisningsexperiment, efter

[1] Någon gång torde dock resultat från en *andra* uppvisning ha smugit sig in bland beräknade värden.

EFTERLÄNGTAD BOK

FÖR

MATEMATIKSTUDERANDE

MATEMATIK FÖR TVÅ BETYG

150 matematiska problem givna vid tentamensskrivningar för två betyg i fil. kand.- och fil. ämbetsexamina. Med svar och utförliga lösningar utgivna av

SVEN H. HILDING

Pris kr. 10:—

TIDIGARE HAR UTKOMMIT:

TORSTEN CARLEMAN

Lärobok i Differential- och Integralkalkyl jämte geometriska och mekaniska tillämpningar

2:a upplagan. Pris inb. kr. 22:—

HARALD CRAMÉR

Mathematical Methods of Statistics

Pris inb. kr. 45:—

Första upplagan slutsåld. Ny upplaga kommer i höst.

Almqvist & Wiksells akademiska handböcker

HUGO GEBERS FÖRLAG

VERKSTÄDER FÖR FRAMSTÄLLNING AV

LABORATORIEGLAS, MEKANISKA OCH ELEKTRO-MEKANISKA ARBETEN M.M.

Vi inbjuda till ett besök i våra

moderna utställningslokaler

Utställning, fabrik och kontor

MALMSKILLNADSGATAN 48 C

Telefon: 23 37 80 (växel)

vilken eleverna arbetat.[1] Visserligen hållas även föreläsningar i samband med övningarna, men dessa avse ej att ge några förtydligande tillägg till boken utan endast att på förhand orientera eleverna i vad saken gäller, så att en övning skall kunna komma snabbare i gång samtidigt med alla eleverna.

Inalles ha 11 huvudtyper av experiment medtagits. Även andra kvantitativa försök utföras på kursen i fråga, men jag har ansett dessa av mindre intresse. En del tidigare här utförda försök ha icke heller protokollförts så noggrant, att en bearbetning är möjlig.

Några, kanske de flesta av de anförda experimenten utföras i gymnasierna, åtskilliga andra av dem skulle förtjäna att utföras. Tillgängliga hjälpmedel äro ofta desamma där som vid kurserna vid universitetet. Skillnaden ligger väl mest i den större noggrannhet som fordras vid de senare. Vid kurserna i undervisningsexperiment är noggrannheten icke resultat av en särskild överenskommelse mellan funktionärerna vid kursen. En viss tradition har utbildat sig efter hand: så och så stor noggrannhet uppnås av flertalet, och denna strävar tjänstemannen att söka bibehålla med ledning av tidigare protokoll.

Nära hälften av experimenten utgöras av gasvolymetriska bestämningar, alla utförda med gasbyrett. Denna har vid många av försöken varit av en hemmagjord typ — en omvänd byrett i ett större vattenfyllt glasrör —, och denna typ ger — så vitt vi kunnat finna — lika noggranna värden som handelns vanliga gasbyrett. Den möjliggör dessutom avläsning efter kortare väntetid, eftersom den är vattenkyld. En dylik gasbyrett borde ha större användning i läroverken. Den är bekväm och hållbar, och eleverna vänja sig snabbt vid att hantera den.

I det följande betyder: n antal försök, som beräknats; e medelfel hos enstaka försök; gk % den procent av samtliga deltagare, som godkänts vid första uppvisningen av försöket.

I. Vätgasutveckling genom inverkan av metall på saltsyra.

Försöket är alltför känt för att behöva beskrivas. Gasutvecklingen får försiggå i ett tunt och smalt glasrör med en utbuktning på undre sidan (»bröströr»), i vilket metallen förvaras, tills allt är hopkopplat, varpå röret skakas, så att metallen faller ner i syran. Utvecklade gasvolymer: ca 30 ml.

1. Magnesium: ekvivalentvikt $= 12{,}17 \pm 0{,}03$ (ber. 12,16); $e = \pm 0{,}13$; $n = 21$; gk % $= 75$. Underkända försök inverka icke på medelvärdet.

[1] L. Smith, Lärobok i oorganiska undervisningsexperiment, Gleerups förlag, Lund, 1941.

2. Zink: ekv.-vikt = 32,7 ± 0,16 (ber. 32,69); $e = \pm 0{,}50$; $n = 10$; gk % 70. — Medräknas underkända försök, blir medelvärdet 33,15.

II. Koldioxidutveckling genom reaktion mellan karbonat och syra.

Gasutveckling i bröströr enligt ovan och uppsamling av gasen över med kolsyra mättat vatten. Gasvolymer som i föreg. försök.

1. Försök med natriumkarbonat (vattenfritt), som glödgats *svagt* och sedan fått svalna i exsickator: ekv.-vikt = 53,42 ± 0,07 (ber. 53,0); $e = \pm 0{,}31$; $n = 17$. Medräknas underkända försök, blir ekv.-vikten 53,50.

2. Kalciumkarbonat: ekv.-vikt 49,52 ± 0,39 (ber. 50,0); $e = \pm 1{,}23$; $n = 10$. — Anteckningarna om underkända försök voro otydliga. Medeltalet godkända (båda försöken tillsamman) = 80 %.

III. Kvantitativ sönderdelning av kvicksilveroxid.

Väl torkad analysren oxid. Asbestpropp för att filtrera gasströmmen. Försöket är behäftat med tvenne fel: kvicksilveroxiden förblir delvis osönderdelad, å andra sidan uppstå förluster genom gasströmmen och kvicksilvrets flyktighet. Vid vägning av röret efteråt kunna positiva och negativa fel kompensera varandra. Utvecklade gasvolymer: 20—30 ml.

Kvicksilvrets ekvivalentvikt blir nära riktig: 100,6 ± 0,3 (ber. 100,3); $e = \pm 1{,}5$; $n = 23$. Beräknas ur den uppmätta syrgasvolymen och rörets *viktsförlust* syrets litervikt, erhålles 1,434 ± 0,004 (ber. 1,429); $e = \pm 0{,}021$. Göres åter beräkningen av litervikten med hjälp av uppmätt gasvolym och ur *HgO:s vikt beräknad syrevikt*, blir litervikten 1,455, vilket visar att för lite syrgas utvecklats, att sönderdelningen alltså varit ofullständig. Men ekvivalentvikten, som uteslutande bestämmes genom vägning, blev trots detta rätt på 0,3 % när. — Försöket är relativt svårt. Dock godkändes 70 % av försöken vid första uppvisningen. — Kvicksilvrets ekv.-vikt med hänsyn till *samtliga* försök = 100,0.

IV. Bestämning av vattnets sammansättning efter volym med glödtrådspipett.

I glödtrådspipetten, som liknar en hempelpipett, införes (över vatten) med gasbyrett en känd volym luft (ca 80 ml), varpå en platinatråd bringas till glödning i denna. Nu införes en likaledes noga känd vätgasvolym (ca 40 ml), vilken då förbrinner vid själva införandet i glödtrådspipetten. Den resterande gasvolymen föres tillbaka i gasbyretten och mätes efter avsvalning. Antages luftens sammansättning bekant, kunna de försvunna väte- och syrgas-

mängderna beräknas. Försöket går snabbt. Vi ha arbetat med rel. grov platinatråd (10 cm lång och 0,5 mm diam.) och 12—15 ampère, men tunnare tråd är också användbar.

Resultat: volymförhållandet väte : syre = $2{,}008 \pm 0{,}005$; $e = \pm 0{,}028$; $n = 27$; gk % = 90 eller mer. Medelvärde av *alla* försök = 2,003. — Då endast ett par apparaturer finnas tillgängliga, få de studerande vänta på sin tur att utföra försöket och lära sig detta genom att se det utföras några gånger. Försöket lär enligt amanuenserna ej vara lättlärt.

V. Luftanalyser enligt olika metoder.

1. Pyrogallollösning som absorptionsmedel.

a. Lösningen i hempelpipett kombinerad med gasbyrett (50 ml luft): syreprocent $20{,}22 \pm 0{,}08$; $e = \pm 0{,}4$; $n = 25$; gk % = 90. Medelvärde av *alla* försök = 20,12. Den funna syreprocenten är alltid för låg.

b. Pyrogallollösning i eudiometerrör: syreprocent = $20{,}35 \pm 0{,}16$; $e = \pm 0{,}8$; $n = 24$; gk % = 80.

Av ovanstående får helt säkert icke dragas den slutsatsen att den förra metoden på grund av något *metodiskt* fel skulle ge värden, som ligga längre från det riktiga än den mycket primitiva eudiometermetoden. Orsaken till detta förhållande ligger sannolikt i ett fel vid utförandet av ett eller annat slag, som vi närmare måste efterforska.

2. Fosfor (som bit eller stav) som absorptionsmedel (i eudiometerrör). Syreprocent = $20{,}1 \pm 0{,}2$; $e = \pm 0{,}6$; $n = 10$; gk % = 100. — Försöket tar lång tid och kan alltså icke kontrolleras av försöksledaren.

3. Syreabsorption med glödande kopparnät. Försöket är halvkvantitativt; resterande kväve uppmätes i en graderad cylindrisk tvättflaska. Det anföres här endast därför att medelvärdet trots allt blir överraskande rätt. Syreprocent = $19{,}4 \pm 0{,}2$; $e = \pm 1{,}0$; $n = 18$; gk % = 75.

VI. Elektrolys av utsp. svavelsyra i Hofmannapparat.

Svavelsyran 10-procentig. Spänning 10—12 volt. Mättning med gaserna i 5—10 minuter. Utvecklade vätgasvolymer: 20 à 40 ml. Volymförhållande $2{,}006 \pm 0{,}005$; $e = \pm 0{,}025$; $n = 30$; gk % = 90. — Medräknas *alla* försöken, fås 2,010. Felen gå övervägande i riktning av för lite syrgas, som också är att vänta.

Elektrolyser av klorväte och ammoniak utföras också kvantitativt på kursen. Resultaten synas emellertid stundom vara behäftade med fel, vilkas orsak icke med säkerhet kan anges (förore-

ningar i elektroderna), och jag har därför avstått från att behandla dessa elektrolyser.

VII. **Försök i Liebigs anka.**

Försöken äro lätta och utföras med stor säkerhet och snabbhet, om ankan är *riktigt dimensionerad* och under försöket *fixeras säkert* i horisontellt läge. Här prövad reaktion: omvandling av vattenfri soda (ca 1 g) i koksalt med hjälp av stark saltsyra (1 vol. rykande + $^1/_2$ vol. vatten). Förhållandet $2NaCl:Na_2CO_3$ (*f*) beräknades.

Resultat: $f = 1{,}098 \pm 0{,}002$ (ber. 1,103); $e = \pm 0{,}010$; $n = 25$; gk % = 70. Vanligaste felkällan är förluster genom stänk vid utvecklingen av koldioxid. Det är anmärkningsvärt, att dessa icke äro större. Försöket genomföres på kort tid. Ankans konstruktion är tydligen även i detta hänseende gynnsam. — Medelvärde av *alla* försök = 1,094.

VIII. **Reaktionen Sn → SnO_2.**

Stanniol (1 à 1,3 g) oxideras med rykande salpetersyra, och den bildade tenndioxidens mängd bestämmes. I en av mig angiven version filtreras fällningen genom filterdegel och tvättas där med alkohol och eter, överföres därpå i en vanlig degel, där den glödgas. Försöket kan på detta sätt utföras mycket raskt. Vi ha ansett det pedagogiskt riktigare för kursens del att avfiltrera oxiden på filtrerpapper och på vanligt sätt bränna och glödga.

Tennets »atomvikt» = $119{,}6 \pm 0{,}15$ (ber. 118,7); $e = \pm 0{,}63$; $n = 17$; gk % = 100 (?). Den för höga »atomvikten» beror förmodligen till större delen på viktsförluster. Vilken roll föroreningar i tennet spela, kan vara svårt att avgöra.

IX. **Kvantitativ syntes av vatten.**

Försöket är hämtat från en engelsk författare, som dock ej angivit möjligheten av ett kvantitativt utförande. Syntesen är Berzelius' och Dulongs klassiska: kopparoxid reduceras med torrt väte, och det bildade vattnet väges. Det här använda speciella knepet består däri att ca 90 % av det bildade vattnet uppfångas i ett kylt förlag (en vanlig fraktionskolv) i vätskeform, endast den sista resten kvarhålles av ett klorkalciumrör. Reduktion av oxiden (5—6 g; i några försök endast ca 1 g) genomföres lätt på 20 minuter. Kopparoxiden måste givetvis vara analysren och gjord på våta vägen. — Jag vill begagna tillfället att anmärka, att den i läroboken anbefallda genomsugningen av luft före slutvägningen av absorptionskärlet skall ske genom *långsam* sugning (event. med munnen).

Man skulle ju — i varje fall vid elevförsök — vänta att ett märkbart systematiskt fel skulle vidlåda bestämningen av vattnets sammansättning, därför att dettas vikt dock i genomsnitt borde bli något för liten, medan bestämningen av syret (= kopparoxidens viktsförlust) bör vara utan större systematiska fel. Vattnets procentiska sammansättning blir emellertid nära riktig, syreprocenten endast 0,3 % för hög.

Cu = $63{,}13 \pm 0{,}14$ (ber. 63,6); $e = \pm 0{,}65$; procent syre i vatten $89{,}1 \pm 0{,}31$ (ber. 88,8); $e = \pm 1{,}5$; $n = 23$; gk % 75. — Medräknas *alla* försök, erhålles det föga avvikande 89,2 %.

X. Elektrolys av kupro- och kuprisalt.

Försöken gingo ut på att bestämma i kupro- och kuprisalt samtidigt fälld koppar. Kuprosaltet bör utgöras av nyberedd klorid löst i utspädd saltsyra, kuprisaltet var sulfat. Försöksbetingelserna kunna icke återges i korthet. Förhållandet mellan kopparmängderna betecknas f nedan. Resultat $f = 1{,}98 \pm 0{,}01$; ($e = \pm 0{,}04$); $n = 29$; gk % = 50. — De uteslutna försöken voro i genomsnitt 20 % för låga. Försöksbetingelserna böra tydligen genomgås på nytt. Kuprosaltlösningarna ha sannolikt varit oxiderade.

En samtidig uppsamling av vätgas (i alkali över nickelelektrod) synes i de flesta försöken ge något (kanske 2 %) för stora volymer i förhållande till vägd koppar i kuprisaltet. Saken är dock icke närmare undersökt, och det tillgängliga siffermaterialet synes mig något osäkert. Vi ha icke lagt större vikt vid denna volymbestämning, till vilken eudiometerrör använts.

XI. Titreringar av flerbasiska syror.

Försöken avse att visa förhandenvaron av multipla proportioner vid dylika titreringar. Det nedan anförda talet f anger — vid fosforsyra och svavelsyrlighet — förhållandet mellan de mängder lut, som åtgå för titrering av en viss syramängd till andra, resp. första omslaget. Vid kolsyra förfar man omvänt: här titreras en lösning av natriumkarbonat med syra först försiktigt (med jämförelselösning) till bikarbonatpunkten (fenolftalein som indikator), och därpå vidare under användande av metylorange som indikator. Talet f betyder också här förhållandet mellan mängderna använd syralösning till andra, resp. första omslaget. I övrigt kunna betingelserna ej återges i korthet. Titreringslösningarna böra vara tämligen koncentrerade.

1. Titrering av fosforsyra: $f = 1{,}999 \pm 0{,}0025$; $e = \pm 0{,}012$; $n = 25$; gk % = 95. Medelvärde av *alla* försök $f = 1{,}996$.

2. Titrering av svavelsyrlighetslösning. Denna skall vara nyberedd. Jämförelselösning ej nödvändig: $f = 1{,}_{999} \pm 0{,}_{006}$; ($e = \pm 0{,}_{018}$); $n = 11$; gk % = 60. Underkända försök i genomsnitt 10 % för låga. Då försöksanordningen skall vara densamma som ovan, är en så stor avvikelse ej förklarlig. Möjligen har svavelsyrlighetslösningen dock varit felaktig i något avseende (oxiderad, för utspädd). Enstaka par ha kanske sökt genomföra titreringen *utan* jämförelselösning, ett alternativ, som finns upptaget i läroboken.

3. Titrering av kolsyra (soda med syra): $f = 2{,}_{006} \pm 0{,}_{003}$; ($e = \pm \pm 0{,}_{014}$); $n = 25$; gk % = 65. Underkända försök i genomsnitt 4 % för låga. Försöket är ej lätt att utföra riktigt utan förövning.

De erhållna medelvärdena av försöksresultaten visa god överensstämmelse med dem i nämnda lärobok angivna, vilka emellertid i många fall stödja sig på enstaka försök. Av elevernas försök erhållna medelvärden ligga oftast något närmre de teoretiskt beräknade.

Om enheter för massa, kraft och tryck.

Vid en sammankomst den 18 juni 1945, vari deltogo representanter för vissa akademier, ämbetsverk och sammanslutningar, antogs en resolution angående enheter för massa och kraft m. m. Enheten för massa skulle vara kilogram, enheten för kraft kilopond (kp). Sistnämnda enhet definierades som den kraft, vilken giver massan 1 kg normalaccelerationen $9{,}_{80665}$ m/sek². Motsvarande arbetsenhet är kilopondmeter (kpm), som ersätter kgm. Den vanligaste tryckenheten är 1 at = 1 kp/cm². Till kraftenheten bildas på vanligt sätt under- och överavdelningar enligt decimalsystemet, t. ex. pond (p), megapond (Mp) o. s. v.

Kungl. Skolöverstyrelsen får härmed för vederbörande ämneskonferensers underrättande meddela, att överstyrelsen har för avsikt att från och med vårterminen 1948 genomföra det nya beteckningssystemet vid de skriftliga proven i fysik i studentexamen och praktisk realexamen samt vid fyllnadsprövningar efter studentexamen. Ämneskonferenserna anmodas tillse, att de lärjungar, som skola deltaga i nämnda prov, dessförinnan lärt känna de nya beteckningarna.

Stockholm den 13 maj 1946.

Otto Holmdahl

Ragnar Lundblad

Arne Kristenson

Aluminiumhydroxidens löslighet och olöslighet.

Av G. STARCK.

Det är lätt att påvisa och inför ett auditorium demonstrera, att aluminiumhydroxid är löslig i natronlut, men det är inte lika lätt att otvetydigt visa, att föreningen är olöslig eller svårlöslig i ammoniak, annat än om aluminiumlösningen är osedvanligt starkt koncentrerad. Redan på ett par meters avstånd är en svag fällning av aluminiumhydroxid osynlig, beroende utan tvivel på dess brytningsindex. Diaspor, $Al_2O_3.H_2O$, har brytningsexponenterna för D-linjen 1,702, 1,722 och 1,750. Hydrargillit (gibbsit), $Al_2O_3.3H_2O$, har brytningsexponenterna 1,566, 1,566 och 1,587. Det torde inte vara alltför felaktigt att antaga, att den ännu starkare vattenhaltiga aluminiumhydroxid-hydrogelen har en brytningsexponent, som ligger ännu närmare vattnets. Nedanstående metod att göra den tydligt synlig utgör endast en modifikation av användningen av alizarin som reagens på aluminium.

Följande lösningar ha använts.

1. Alizarin: 1,00 g alizarin, upplöst i 10 ml 1 C NH_4OH, lösningen utspädd med 1 liter vatten.
2. 1 C NaOH och 1 C NH_4OH.
3. 0,1 C Al^{+3}-lösning (t. ex. 47,44 g krist. kalialun pr liter).

Lektionsförsök.

A. Två cylindrar (5 · 25 cm) beskickas var och en med 10 ml Al^{+3} och ungefär 200 ml vatten. Man tillsätter NaOH resp. NH_4OH portionsvis, till sist i överskott och konstaterar, att säkert den ena, möjligen båda fällningarna lösas upp. För att nu förvissa sig om hur härmed förhåller sig gör man om försöket men tillägger nu en tredje cylinder med endast 200 ml vatten. Alla tre vätskorna färgas med cirka 10 droppar alizarin, varvid aluminiumlösningarna bliva röda, men vattnet blir blått. Då nu Al^{+3} försättes med NaOH resp. NH_4OH, blir den förra lösningen snart dels fullt klar, dels blå, medan ammoniak även i stort överskott ej åstadkommer någon förändring. Tvärtom, cylindern med Al^{+3} + ammoniak innehåller tydliga röda flockar av färglacket, som efter en stund sjunker till botten och bildar ett vackert, några cm högt skikt.

B. Med användning av den Tyndall'ska belysningsmetodiken kan försöket utföras på följande sätt. Två kuvetter, A och B, med planslipade väggar och av dimensionerna 10 · 10 · 3 cm placeras i serie omedelbart intill varandra i ljusets väg, A närmast ljuskällan. Båda fyllas med cirka 250 ml så vitt möjligt rent vatten och försättas med 5 ml Al^{+3} + några droppar alizarin. Då kuvetten A försättes med NaOH, blir ljusbandet först starkare rött och mera markerat, men vid ökad tillsats av NaOH försvinner ljusbandet (bortsett från den Tyndalleffekt, som lösningarna i och för sig ge och som är av en annan karaktär), och vätskan blir tydligt blå. I kuvetten B, som beskickas med NH_4OH, erhålles ett kraftigt ljusband i en oföränderligt rödfärgad blandning, kvarblivande även vid stort överskott av fällningsmedlet.

Laborationsförsök.

Försök *A* lämpar sig utmärkt som laborationsförsök. Först få eleverna på vanligt sätt utfälla Al-hydroxid (ur en starkt utspädd lösning) dels med NaOH, dels med NH_4OH och undersöka lösligheten i överskott av fällningsmedlet. Om Al-lösningen varit tillräckligt utspädd, komma några av laboranterna att anse hydroxiden vara löslig i NH_4OH. Försöket göres nu om med av alizarin färgade lösningar, varvid NaOH i överskott ger en klar blå lösning, vars färg är densamma eller nästan densamma, som den färg, som alizarinlösningen meddelar vatten. Ammoniaken ger även i stort överskott en röd blandning, vari efterhand vackert röda, stora flockar av Al-hydroxid kunna iakttagas.

Kvantitativt försök.

I samband med ovanstående försök har jag utfört en enkel kvantitativ undersökning av Al-hydroxidens löslighet i NaOH. 25, 50 och 100 ml $0{,}_{100}$ C Al^{+3} titrerades till klarhet med $0{,}_{9963}$ C NaOH under tillsats av 10 droppar alizarin. I 5 försök åtgick, omräknat på 25 ml Al^{+3},

$10{,}_{15}$, $10{,}_{20}$, $10{,}_{20}$, $10{,}_{30}$, $10{,}_{21}$ i medeltal $10{,}_{21}$ ml NaOH.

Förhållandet mellan OH^{-1} och Al^{+3} blir sålunda:

$$10{,}_{21} \cdot 0{,}_{9963} \text{ millimol} / 25 \cdot 0{,}_{1} \text{ millimol} = 4{,}_{06}.$$

Resultatet visar, att den bildade aluminatjonen har formeln AlO_2^{-1}, och att den bildats enligt formeln:

$$Al^{+3} + 4\,OH^{-1} \rightarrow AlO_2^{-1} + 2\,H_2O.$$

Slutpunkten är skarp, försöket är lätt att utföra och ett utmärkt laborationsförsök, som bör kunna bidraga till att göra aluminatjonen, denna för de flesta elever säkerligen mycket dimmiga konstruktion, till en något mera levande verklighet.

Om olikheter och konvexa funktioner.

Av V. STENSTRÖM.

Det finnes några mycket bekanta olikheter, som alltjämt tyckas locka till uppställande av nya bevis, ofta mycket konstlade. Särskilt överflöda bevisen för olikheten mellan aritmetiska och geometriska medelvärdena, trots att CAUCHY gav ett bevis därför, som knappast kan överträffas i enkelhet.

Avsikten med denna framställning är att rikta uppmärksamheten på att flertalet av mer kända olikheter kunna härledas med hjälp av konvexa funktioner. Detta kanske icke är så allmänt känt, att icke nedanstående inledning i ämnet skulle kunna motiveras. Metoden härrör från JENSEN, till vilkens avhandling »Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes» (Acta Matematica, t. 30, 1906) vi hänvisa för vidare studium. En kort framställning av detta ämne finnes även i HAUPT-AUMANN, Differential- und Integralrechnung, bd 1, s. 178—189, Berlin 1938.

1. **Konvexa och konkava funktioner.** En funktion $\varphi(x)$, som är reell och ändlig i ett visst intervall, säges vara *konvex* i detta intervall, om den satisfierar olikheten

$$\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \geqq \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{1}$$

Gäller det omkastade olikhetstecknet, säges funktionen vara *konkav*. Det kan vara bekvämt att införa konkava funktioner, ehuru det ej är nödvändigt, enär $-\varphi(x)$ är konvex, ifall $\varphi(x)$ är konkav.

Såsom exempel må anföras:

a. e^x är konvex i varje ändligt intervall. Av $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{y}{2}}\right)^2 \geqq 0$ följer nämligen $\frac{e^x+e^y}{2} \geqq e^{\frac{x+y}{2}}$.

b. $\log x$ är konkav i varje ändligt intervall (a, b), där $0<a<b<\infty$. Enär $\log x$ är monotont växande, så följer ur $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqq 0$, eller $\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$, att $\log\frac{x+y}{2} \geqq \frac{\log x+\log y}{2}$.

c. x^r är konvex för $r>1$, $r<0$; konkav för $0<r<1$.[1] Bevis följer nedan.

En konvex funktion, som är begränsad i det betraktade intervallet, kan visas vara kontinuerlig därstädes. Vi antaga emellertid här i stället att den är kontinuerlig.

2. **Sats:** Om $\varphi(x)$ är kontinuerlig och konvex i ett givet intervall, så gäller olikheten

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\Sigma p_\nu x_\nu\right) \leqq \frac{1}{p}\Sigma p_\nu \varphi(x_\nu),$$

där $x_1, x_2, \ldots x_n$ tillhöra det givna intervallet och $p=\Sigma p_\nu$, där $p_1, p_2, \ldots p_n$ äro godtyckliga positiva tal. (Samtliga summationer utsträckas över $\nu=1, 2, \ldots n$). Är $\varphi(x)$ konkav, gäller formeln med omkastat olikhetstecken.[2]

Bevis: $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\varphi(x_4) \geqq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \geqq$

$$\geqq 4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$$

och i allmänhet

$$\sum_{\nu=1}^{2^m}\varphi(x_\nu) \geqq 2^m \cdot \varphi\left(\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=1}^{2^m} x_\nu\right).$$

Om $2^m>n$, sättes $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{2^m}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, och då är

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu)+\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)(2^m-n) \geqq$$

$$\geqq 2^m\varphi\left[\frac{1}{2^m}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\cdot\overline{2^m-n}\right)\right] =$$

$$=2^m\cdot\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right),$$

[1] De funktioner, vilka här tagits som exempel äro ju deriverbara, och deras konvexitet, resp. konkavitet följer som bekant också ur tecknet på andra derivatan.

[2] Efter det denna uppsats lämnats till Elementas red. har jag i bd. *26*, s. 154 av Elementa funnit en uppsats av N. Juringius, i vilken denna grundformel angivits. Jag vill här samtidigt begagna tillfället nämna, att jag i samma uppsats funnit ett lemma rörande de symmetriska grundfunktionerna, vilken sats jag med väsentligen samma bevis framställt senare i Elementa, bd *28*, s. 13.

och således

$$\frac{1}{n}\sum \varphi(x_\nu) \geq \varphi\left(\frac{1}{n}\sum x_\nu\right).$$

Om m_ν äro positiva hela tal och $\sum_1^n m_\nu = m$, har man alltså

$$\frac{1}{m}\sum m_\nu \varphi(x_\nu) \geq \varphi\left(\frac{1}{m}\sum m_\nu x_\nu\right).$$

Om p_ν äro positiva reella tal, kunna följder av hela tal m_ν väljas så, att $\frac{m_\nu}{m} \to \frac{p_\nu}{p}$. Av kontinutiten hos $\varphi(x)$ följer satsens riktighet. Vi vilja i det följande kalla den bevisade olikheten för grundformeln.

Om man i punkterna $(x_\nu, \varphi(x_\nu))$ på kurvan $y = \varphi(x)$ anbringar partiklar med massorna p_ν respektive, uttrycker grundformeln att tyngdpunkten för dessa massor ligger ovanför kurvan, om denna är konvex nedåt.

3. **Exempel på olikheter.** Vi sätta genomgående $\Sigma p_\nu = p$, där summationen, liksom vid samtliga summor, utsträckes över $\nu = 1, 2, \ldots n$.

För $\varphi = -\log x$ ger grundformeln

$$\log\left(\frac{1}{p}\Sigma p_\nu x_\nu\right) \geq \frac{1}{p}\Sigma p_\nu . \log x_\nu,$$

och således

$$\frac{1}{p}\Sigma p_\nu x_\nu \geq \left(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{»Rogers olikhet»}) \quad (2)$$

För $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ övergår denna olikhet till

$$\frac{1}{n}\Sigma x_\nu \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \quad (2\,a)$$

Vi sätta sedan $\varphi(x) = x^r$, $(x > 0)$ och vilja först bevisa att denna funktion är konvex för $r > 1$, $r < 0$ och konkav för $0 < r < 1$.

Sättes $p_1 = r$; $p_2 = 1 - r$; $x_1 = x$; $x_2 = 1$ i (2), erhålles

$$x^r - 1 \leq r(x - 1) \quad \text{för} \quad 0 < r < 1. \quad (2\,b)$$

Utbytes sedan r mot $\frac{1}{r}$ och x mot x^r i (2 b), får man

$$x^r - 1 \geq r(x - 1) \quad \text{för} \quad r > 1. \quad (2\,c)$$

Om man vidare i (2 c) ersätter r med $(1-r)$ och x med $\frac{1}{x}$, erhålles

$$x^r - 1 \geqq r(x-1) \quad \text{för} \quad r<0. \tag{2 d}$$

Antag först $0<r<1$. Enligt (2 b) är

$$\left(\frac{2x}{x+y}\right)^r - 1 \leqq r\left(\frac{2x}{x+y}-1\right) \text{ och } \left(\frac{2y}{x+y}\right)^r - 1 \leqq r\left(\frac{2y}{x+y}-1\right).$$

Adderas dessa olikheter led för led erhålles

$$\frac{x^r+y^r}{2} \leqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^r. \quad \text{Således är } x^r \text{ konkav för } 0<r<1.$$

På samma sätt bevisas, att x^r är konvex för $r>1$ och $r<0$ genom användning av olikheterna (2 c) och (2 d) respektive.

Grundformeln ger alltså följande olikheter:

$$\left(\frac{1}{p}\Sigma p_\nu x_\nu\right)^r \leqq \frac{1}{p}\Sigma p_\nu {x_\nu}^r \quad \text{för } r>1,\ r<0.$$

$$\left(\frac{1}{p}\Sigma p_\nu x_\nu\right)^r \geqq \frac{1}{p}\Sigma p_\nu {x_\nu}^r \quad \text{för } 0<r<1.$$

Sättes i den förra $x_\nu = \dfrac{a_\nu}{b_\nu^{\frac{1}{r-1}}}$; $\dfrac{p_\nu}{p} = \dfrac{b_\nu^{\frac{r}{r-1}}}{\Sigma b_\nu^{\frac{r}{r-1}}}$ (a_ν, b_ν pos. tal),

övergår denna till

$$\Sigma a_\nu b_\nu \leqq \left(\Sigma {a_\nu}^r\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\Sigma b_\nu^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} \quad (r>1) \quad (\text{»Hölders olikhet»}) \tag{3}$$

För $r=2$ erhålles

$$\Sigma a_\nu b_\nu \leqq \sqrt{\Sigma {a_\nu}^2} \cdot \sqrt{\Sigma {b_\nu}^2} \quad (\text{»Schwarz' olikhet»})$$

Sättas samtliga $b_\nu = 1$ övergår Hölders olikhet till

$$\Sigma a_\nu \leqq n^{\frac{r-1}{r}} \cdot \left(\Sigma {a_\nu}^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{3 a}$$

4. Jämförelse mellan olika slags medelvärden.

Om $\varphi(x)$ är monotont växande och $\varphi^{-1}(x)$ dess inversa funktion, så kan grundformeln skrivas under formen

$$\frac{1}{p}\Sigma p_\nu x_\nu \leqq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{p}\Sigma p_\nu \varphi(x_\nu)\right), \text{ eller speciellt } \frac{\Sigma x_\nu}{n} \leqq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\Sigma \varphi(x_\nu)\right) \tag{4}$$

Vi införa enligt Aumann (se citerat arbete) beteckningen $M_\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\sum \varphi(x_\nu)}{n}\right)$, som vi kalla »$\varphi$-medelvärdet» för $x_1, x_2, \dots x_n$. För $\varphi(x) = x^r$ blir exempelvis $M_\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$, och för $\varphi(x) = \log x$ blir $M_\varphi(x_1 x_2 \dots x_n) = e^{\frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n)} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

Olikheten (4) är alltså en jämförelse mellan aritmetiska medelvärdet och φ-medelvärdet. Allmännare kunna vi jämföra tvenne godtyckliga medelvärden och fråga, när $M_\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq M_\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$, där φ och ψ äro monotont växande funktioner.

Ur $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum \varphi(x_\nu)\right) \leqq \psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum \psi(x_\nu)\right)$ erhålles

$$\psi\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum \varphi(x_\nu)\right)\right) \leqq \frac{1}{n}\sum \psi(x_\nu).$$

Sättes $\varphi(x_\nu) = \xi_\nu$ och $\psi(\varphi^{-1}(x)) = \Phi(x)$, så är $\Phi(\xi_\nu) = \psi(x_\nu)$ och alltså

$$\Phi\left(\frac{1}{n}\sum \xi_\nu\right) \leqq \frac{1}{n}\sum \Phi(\xi_\nu).$$

Nu gäller denna olikhet, om $\Phi(x) = \Psi(\varphi^{-1}(x))$ är konvex, och alltså har man i detta fall

$$M_\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq M_\psi(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Analogt erhålles för monotont avtagande funktioner φ, ψ

$M_\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \geqq M_\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$, ifall $\psi(\varphi^{-1}(x))$ är konkav.

Jämförelsen mellan olika φ-medelvärden är därmed återförd till frågan om funktioners konvexitet och konkavitet.

Exempel. Om $\varphi(x)$ är konkav och växande, så är $\varphi^{-1}(x)$ konvex, ty ur $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right)$ följer $\frac{x+y}{2} \geqq \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right)$ eller $\frac{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)}{2} \geqq \varphi^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Om vidare $\psi(x)$ är konvex och växande, så är $\psi(\varphi^{-1}(x))$ konvex. Vi ha nämligen

$$\psi\left(\varphi^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leqq \psi\left(\frac{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)}{2}\right) \leqq \frac{\psi(\varphi^{-1}(x)) + \psi(\varphi^{-1}(y))}{2}.$$

Som ett exempel kunna vi välja $\psi(x)=e^x$; $\varphi(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$. $\psi(\varphi^{-1}(x))=e^{x^2}$ är då konvex, varav

$$\left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{n}\right)^2 \leq \log\left(\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}}{n}\right).$$

Till slut en enkel användning av olikheten (3 a) för att bevisa, $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| = 0$, om $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^r$ är konvergent och $r>1$. (Ett specialfall av denna sats, nämligen för $r=2$, var given som matematisk uppgift nr 1391 i Elementa bd *28*, s. 112, av sign. *Hg*.)

Enligt (3 a) blir

$$(n+m)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sum_{\nu=1}^{n+m} |a_\nu| = (n+m)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sum_{\nu=1}^{m} |a_\nu| + (n+m)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sum_{\nu=m+1}^{n+m} |a_\nu| \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{n+m}\right)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |a_\nu|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Först väljes m så stort att

$$\left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |a_\nu|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

där ε är ett godtyckligt litet positivt tal.

Sedan kan n tagas så stort att

$$\left(\frac{m}{n+m}\right)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Härav följer då

$$\sum_{\nu=1}^{n+m} \frac{1}{(n+m)^{\frac{r-1}{r}}} |a_\nu| < \varepsilon.$$

En olikhet för de in- och omskrivna sfärernas radier i en tetraeder.

Av GÖSTA DANIELSSON.

I en föregående uppsats [1] har visats, att för avståndet d mellan in- och omskrivna sfärernas medelpunkter i en tetraeder gäller

$$d^2 = R^2 - \frac{\sum_{i<j} S_i S_j k_{ij}^2}{(S_1+S_2+S_3+S_4)^2}, \tag{1}$$

där R är omskrivna sfärens radie, S_i den mot tetraederhörnet A_i stående sidoytan och k_{ij} den kant som innehåller hörnen A_i och A_j; $i, j = 1, .., 4$.

Med utgångspunkt från denna formel skall nu visas, att för varje tetraeder gäller olikheten

$$R \geqq 3r, \tag{2}$$

där r är inskrivna sfärens radie. Denna olikhet är bevisad så snart man funnit, att

$$\sum_{i<j} S_i S_j k_{ij}^2 \geqq 81 V^2, \tag{3}$$

där V är tetraederns volym. Ty av (1) och (3) följer, om vi sätta

$$\sum_{i=1}^{4} S_i = S,$$

$$R^2 \geqq \frac{1}{S^2} \sum_{i<j} S_i S_j k_{ij}^2 \geqq \frac{81 V^2}{S^2} = 9r^2 \tag{4}$$

på grund av den lätt insedda formeln $3V = rS$.

För att bevisa (3) skola vi bl. a. använda oss av följande sats [2]:

För två godtyckliga trianglar $P_1P_2P_3$ och $P_1'P_2'P_3'$, som ligga i samma plan, gäller

[1] G. DANIELSSON, Om avståndet mellan in- och omskrivna sfärernas medelpunkter i en tetraeder, Elementa *28* (1945), s. 131.

[2] G. KOWALEWSKI, Einführung in die Determinantentheorie, 1942, s. 236.

$$16\,TT' = \pm \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

där T och T' äro resp. trianglars ytor och d_{rs} är avståndet mellan hörnen P_r och P_s'. Plustecknet gäller då omloppsriktningarna $P_1 \to P_2 \to P_3$ och $P_1' \to P_2' \to P_3'$ äro motsatta, minustecknet då de äro lika.

Emellertid kan (5) lätt generaliseras till två trianglar, vars plan bilda en godtycklig vinkel. Härvid betyder d_{rs} som förut avståndet mellan P_r och P_s'. Den spetsiga vinkeln mellan T och T' är v. Projektionerna av hörnen P_r' i planet T betecknas P_r''. Dessa punkter bilda en triangel, vars yta är T''. Vidare beteckna vi med d_{rs}' avståndet mellan P_r och P_s''. Vi kunna nu tillämpa (5) på trianglarna T och T'' och få $16TT'' = \pm D'$, där D' är en determinant bildad av d_{rs}' i analogi med (5). Med Pythagoras' sats fås, om man sätter $P_r'P_r'' = \delta_r$, att $d_{rs}'^2 = d_{rs}^2 - \delta_s^2$. Dessa uttryck för d_{rs}' insättas i D'. Till s:te kolonnen ($s = 1, 2, 3$) adderas därefter 4:e kolonnen multiplicerad med δ_s^2. Med iakttagande av att $T'' = T' \cos v$ fås då

$$16\,TT' \cos v = \pm D, \tag{6}$$

där D har samma utseende som determinanten i (5). Tecknet bestämmes enligt ovan av omloppsriktningarna $P_1 \to P_2 \to P_3$ och $P_1'' \to P_2'' \to P_3''$.

Vi skola nu tillämpa (6) på sidoytorna S_1 och S_2 i en given tetraeder $A_1A_2A_3A_4$. För den »inre» vinkeln mellan S_i och S_j införa vi beteckningen (ij). Vi välja nu $P_1 = A_1$, $P_1' = A_2$, $P_2 = P_2' = A_3$ samt $P_3 = P_3' = A_4$ och få, vare sig vinkeln (12) är spetsig eller trubbig,

$$16S_1S_2 \cos(12) = -\begin{vmatrix} k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & 1 \\ k_{23}^2 & 0 & k_{34}^2 & 1 \\ k_{24}^2 & k_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

I den givna tetraedern tänka vi oss nu, att ytorna S_1 och S_2 »vikas ihop» omkring kanten k_{34} så att de komma i samma plan. Avståndet mellan A_1 och A_2, som ju före vikningen var k_{12}, beteckna vi efter vikningen med k'_{12}. Avstånden mellan övriga A_i äro efter vikningen oförändrade. Vi välja P_r och P_r' som ovan. Omloppsriktningarna bli då lika och genom att tillämpa (5) få vi

$$16S_1S_2 = -\begin{vmatrix} k'^2_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \tag{8}$$

där de icke utskrivna elementen överensstämma med motsvarande i (7).

För två tetraedrar med hörnen A_i och A_i' gäller den med (5) analoga formeln [1] $288VV' = \pm D$, där V och V' äro resp. tetraedrars volymer och D en analog determinant av 5:e ordningen. Tecknet bestämmes på följande sätt: De båda tetraedrarna tänkas förflyttade så att trianglarna $A_1A_2A_3$ och $A_1'A_2'A_3'$ komma i samma plan och få lika omloppsriktningar. Om därvid A_4 och A_4' falla på samma sida om detta plan blir tecknet $+$, i motsatt fall $-$. Om A_i sammanfaller med motsvarande A_i', är $d_{ii} = 0$ och $V = V'$, vilket ger [1]

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} & 1 \\ k^2_{12} & 0 & k^2_{23} & k^2_{24} & 1 \\ k^2_{13} & k^2_{23} & 0 & k^2_{34} & 1 \\ k^2_{14} & k^2_{24} & k^2_{34} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Vid den ovan nämnda hopvikningen av ytorna S_1 och S_2 fås en »nolltetraeder». Genom att tillämpa (9) på denna få vi

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & k'^2_{12} & \cdot \\ k'^2_{12} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \tag{10}$$

där de icke utskrivna elementen överensstämma med motsvarande i (9).

Vi konstatera nu att algebraiska komplementet till elementet k^2_{12} i (9) är identiskt med högra ledet i (7). Likaså är algebraiska komplementet till elementet k'^2_{12} i (10) lika med högra ledet i (8).

Vi skola nu härleda en determinantidentitet, vilken, tillämpad på (9), kommer att ge en relation, av vilken olikheten (3) direkt följer.

Vi betrakta en determinant av n:te ordningen $A = |a_{ij}|$. Algebraiska komplementet till elementet a_{ij} betecknas A_{ij}. Vi utveckla A successivt efter de $(n-1)$ första raderna, addera de så erhållna relationerna och få $(n-1)A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, vilket kan skrivas $(n-1)A = \sum_{i,\,j}^{n-1} a_{ij}A_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}A_{in}$. Den sista summan är emellertid

[1] Kowalewski, *loc. cit.* s. 242.

lika med $A - a_{nn}A_{nn}$, varav följer $(n-2)A = \sum_{i,\,j}^{n-1} a_{ij}A_{ij} - a_{nn}A_{nn}$

eller

$$(n-2)A = \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{ij}A_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}A_{ii} - a_{nn}A_{nn}. \tag{11}$$

Om en determinant B överensstämmer med A i alla sina element utom att ett element a_{rs} är ersatt med b_{rs}, har man uppenbart $B = (b_{rs} - a_{rs})A_{rs} + A$. Genom successiv upprepning fås härav: Om en determinant A' överensstämmer med A i alla sina element utom i två a_{pq} och a_{rs}, vilka äro ersatta med a'_{pq} och a'_{rs}, har man $A' = (a'_{pq} - a_{pq})A'_{pq} + (a'_{rs} - a_{rs})A_{rs} + A$, där A'_{pq} är algebraiska komplementet till elementet a'_{pq}. Genom omkastning av indexparen pq och rs fås en analog formel, varpå genom addition följer den symmetriska formeln

$$2(A' - A) = (a'_{pq} - a_{pq})(A'_{pq} + A_{pq}) + (a'_{rs} - a_{rs})(A'_{rs} + A_{rs}).$$

Om determinanten A är *symmetrisk*, vilket hädanefter förutsättes, och $a_{ij} = a_{ji}$ ersättas med $a'_{ij} = a'_{ji}$, så valt, att determinanten A' försvinner, fås

$$(a_{ij} - a'_{ij})(A_{ij} + A'_{ij}) = A.$$

För $i < j \leqq n-1$ fås $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ st. relationer av denna typ. Om dessa adderas fås [1]

$$\sum_{i<j}^{n-1} a_{ij}A_{ij} + \sum_{i<j}^{n-1} a_{ij}A'_{ij} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)A + \sum_{i<j}^{n-1} a'_{ij}(A_{ij} + A'_{ij}). \tag{12}$$

Vi pålägga nu A ytterligare villkoret $a_{ii} = 0$ och erhålla av (11)

$$\tfrac{1}{2}(n-2)A = \sum_{i<j}^{n-1} a_{ij}A_{ij}. \tag{13}$$

Addition av (12) och (13) ger den sökta identiteten

$$\sum_{i<j}^{n-1} a_{ij}A'_{ij} = \tfrac{1}{2}(n-2)^2 A + \sum_{i<j}^{n-1} a'_{ij}(A_{ij} + A'_{ij}). \tag{14}$$

Denna är tillämplig på determinanten (9). Vi sätta alltså $n = 5$, $a_{ij} = k_{ij}^2$, $a'_{ij} = k'^2_{ij}$, $A = 288\,V^2$, $A_{ij} = 16 S_i S_j \cos(ij)$ samt $A'_{ij} = 16 S_i S_j$. Då ger (14)

$$\sum_{i<j} S_i S_j k_{ij}^2 = 81\,V^2 + 2\sum_{i<j} k'^2_{ij} S_i S_j \cos^2 \frac{(ij)}{2}.$$

[1] Alla A' förutsättas alltså försvinna.

Härav följer omedelbart olikheten (3), eftersom $k'^2_{ij} \geqq 0$. För att likhetstecknet i (3) skall gälla fordras, att alla $k'_{ij} = 0$, vilket uppenbart medför, att alla k_{ij} måste vara lika (ty, för att exempelvis k'_{12} skall vara noll fordras, att $k_{13} = k_{23}$ och $k_{14} = k_{24}$). Likhetstecknet i (3) gäller alltså endast för den regelbundna tetraedern.

Därmed är också (2) bevisad. För att likhetstecknet i denna olikhet skall gälla fordras likhet överallt i (4). Det mellersta likhetstecknet gäller enligt ovan endast om tetraedern är regelbunden. För denna är $d = 0$, varför likhet i (3) automatiskt medför likhet överallt i (4). Likhetstecknet i (2) gäller således endast för den regelbundna tetraedern.

Bokanmälningar.

H. W. Turnbull, *The Mathematical Discoveries of Newton.* Blackie and Son, London & Glasgow 1945. 62 s., pris 5 s.

I anslutning till firandet av 300-årsdagen av Newtons födelse (även de sakliga vetenskapsmännen ha sina nationalhelgon, som de omsorgsfullt dyrka) höll prof. Turnbull i Edinburgh två föredrag, som nu föreligga i tryck i ovannämnda lilla bok. Man får där en skildring av den vetenskapliga miljö, i vilken Newton började sina studier och en redogörelse för Newtons viktigaste upptäckter inom matematiken: binomialserien, differential- och integralkalkylen, interpolationsformeln osv. Turnbull går tillväga som en litteraturhistoriker, han utreder de inflytanden, som kan tänkas ha länkat in Newtons forskningar åt det ena och det andra hållet. Tack vare en mängd citat ur originalavhandlingar och brev från eller till Newton får man en god inblick i tidens sätt att tänka och uttrycka sig matematiskt. Boken kan rekommenderas åt alla som äro intresserade av matematikens historia.

Sven Hilding.

Torsten Carleman, *Lärobok i differential- och integralkalkyl* jämte geometriska och mekaniska tillämpningar. Hugo Gebers förlag. 2:a uppl., 1945. 304 s., inb. kr. 22:—.

Den andra upplagan av nämnda lärobok utgör ett mycket välkommet tillskott till den matematiska litteraturen. Den första delen av boken motsvarar ungefär den kurs, som i fråga om differential- och integralkalkyl fordras för betyget godkänd i ämbetsexamen. Den andra delen upptar analysens enklaste användningar inom mekaniken. Framställningen är klar och naturlig, och läsaren får en god inblick i tillämpad matematik. Boken tynges ej av några

abstrakta och invecklade bevis ur teorien för de irrationella talen eller för de kontinuerliga funktionerna. Sådana satser äro ju ej så lättfattliga för den studerande, som är nybörjare på området. Den nya upplagan är försedd med kompletterande noter, av vilka den första omfattar ekvationsteori, ett kapitel på endast 14 sidor, men där förf. ändå hunnit med att bl. a. klargöra lösningen av tredjegradsekvationen, Cartesii teckenregel och Sturms teorem. De två sista noterna innehålla grundläggande satser ur sannolikhetskalkylen och determinantteorien.

Boken har naturligtvis sin omedelbara användning inom undervisningen vid universitet och en del fackhögskolor. Men vissa avsnitt ur den kunna jämte tillhörande övningsuppgifter givas till studium för enskilda arbeten i gymnasiet. För den verkligt matematik-intresserade gymnasisten bör boken i sin helhet vara en utmärkt hjälp vid det första studiet av analysen. Den har även en uppgift att fylla för dem, som någon gång vilja uppfriska minnet av sina under tidigare år bedrivna matematikstudier. Boken, som ingår i serien »Almqvist och Wiksells akademiska handböcker», har av förlaget givits en typografiskt sett mycket vårdad utstyrsel.

Karl Persson.

Sven H. Hilding, *Matematik för två betyg.* Hugo Gebers förlag, Uppsala 1946, 91 s., kr. 10:—.

Denna exempelsamling omfattar 150 st. problem, hämtade från de senaste årens tentamensskrivningar vid Stockholms Högskola (de svåraste?). Uppgifterna ha sorterats under rubrikerna: differentialräkning, integralkalkyl, gränsvärdesproblem, algebra, (att medtaga tillämpningar på analytisk geometri anser förf. på goda grunder onödigt).

Till skillnad från vad man är van vid gives förutom svar även utförliga lösningar, varigenom arbetet får en personlig prägel. Sammanfattningsvis kan konstateras, att denna bok är förfärdigad med skicklighet och omsorg och sålunda är av hög kvalitet.

Då varje uppgift i regel är försedd med endast en lösning — och smaken är olika — är det helt naturligt, att läsaren får lust att här och var »putsa» de givna lösningarna, se t. ex. nr 7, 10 (ofullst.), 71, 80, 82(!), 117.

För de stora skaror studenter, som studera matematik vid våra universitet och högskolor, är denna problemsamling ett välkommet tillskott till den sparsamma litteratur, som f. n. står dem till buds.

Bo Kjellberg.

Helmer Bäckström, *Den kinematografiska filmen, dess förutsättningar, arbetssätt och olika typer.* Pedagogisk skriftserie utgiven av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Lund 1946, 47 s., kr. 2:—. Rekvireras hos Föreningen för matem.-naturv. undervisning, *Ålsten*, genom insättning av kr. 2:— på postgiro 85825.

Den fjärde i ordningen av de skrifter, som utgivits av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, redogör för naturvetenskapens och teknikens andel i filmkonsten. Författarens välkända namn borgar för att framställningen är korrekt och väl avvägd i sina olika delar. I första hälften av skriften beskrivas kameror och projektorer för den vanliga svart-vita stumfilmen. Där behandlas också filmmaterialet, och man får t. ex. veta skillnaden mellan vanlig biograffilm och s. k. säkerhetsfilm, som användes till smalfilm. Den senare består huvudsakligen av cellulosaacetat, som sönderdelas märkbart först över 269°C, under det att biograffilmen, gjord av cellulosanitrat tillsatt med kamfer, börjar sönderfalla redan vid 90°C. Då denna sönderfallsreaktion sker under värmeutveckling, sprider sig förstörelsen snabbt. Orsaken till att den eldfarligare filmen dock användes i biografer är materialets bättre mekaniska egenskaper.

Den senare delen av skriften är ägnad de tekniska framsteg, som gjorts under senare tid. För ljudfilmningen lämnas en kortfattad, redig beskrivning. Intressant är att följa färgfilmens utveckling. De äldsta systemen åstadkommo en färganalys genom fotografering i olika färger med 2—3 objektiv samtidigt. Dessa system slogo dock icke igenom, eftersom de krävde specialbyggda kameror — och vad värre var — specialbyggda projektorer. Vid technicolorförfarandet fotograferas samtidigt tre filmer i olika färger, ehuru kameran endast har ett objektiv. Agfacolormetoden imponerar genom den tekniska finurligheten. Filmen innehåller tre skikt, känsliga för olika färger, och dessutom skyddsskikt och filterskikt. För filmens förvandling till en positiv kopia i korrekta färger erfordras invecklade procedurer. — I de sista avsnitten behandlas stereofilm, ultrarapidkinematografering och kinobilder med tidsförkortning.

Man har all anledning att vara tacksam mot föreningen för att den utger dessa skrifter i pedagogiska ämnen. I det föreliggande ämnet finns visserligen en rik litteratur, framför allt ett par större — och alltså dyrare — handböcker av lektor Bäckström. Det är därför en berömvärd insats föreningen gör, då den utger denna välskrivna och översiktliga skrift till ett så billigt pris. Den har ur ren allmänbildningssynpunkt intresse för var och en, som

önskar få veta något om de tekniska förutsättningarna för filmen. En lärare kan därur hämta notiser, lämpliga att meddela vid undervisningen. Emedan framställningen är så lättfattlig, kan skriften sättas i händerna på intresserade elever av även yngre årgångar. Det är alltså ur flera synpunkter, som skriften kan varmt rekommenderas.

A. Guntsch.

Gösta Stenvinkel, *Hur atombomben kommer till och verkar*, Natur och Kultur, Stockholm 1946, 202 s., kr. 8:—, inb. kr. 11:50.

Till grund för ovanstående arbete ligger den officiella amerikanska rapporten om atombomben, som utgavs hösten 1945 av H. D. Smyth. De fyra första kapitlen med titelrubrikerna energibegreppet, atomens byggnad, naturlig radioaktivitet och konstgjord radioaktivitet ge en utmärkt överblick av radioaktivitetslärans utveckling fram mot 1940, på en gång klargörande och koncis. Framställningen röjer den erfarne och skicklige pedagogen. Det är ingen lätt sak att sovra det rikhaltiga materialet, och någon gång saknar man upplysningar av intresse i sammanhanget, t. ex. att makarna Joliot-Curie voro de första, som med konst framställde ett radioaktivt ämne liksom Lise Meitners namn vid sidan av Hahns på tal om den grundläggande undersökningen av de produkter, som bildas vid neutronbestrålning av uran.

I kap. V framföres allmänna synpunkter på möjligheten att utnyttja atomenergin. Särskilt instruktiv är här avdelningen om bindningsenergi och massdefekt. Därefter följer den egentliga redogörelsen för det storartade vetenskapliga och tekniska forskningsarbete, som utfördes i Amerika åren 1939—45, där det sparades varken på arbetskraft eller medel och där intet lämnades oprövat, som kunde tänkas föra till målet att använda och behärska atomenergin. Med utgångspunkt från där lämnade meddelanden tar sedan förf. upp till diskussion olika vägar att få till stånd en atombomb, dess ödesdigra skadeverkningar och möjliga skyddsåtgärder. Härvidlag synes han företräda en mera optimistisk uppfattning än vetenskapsmännen i allmänhet. I det sista avsnittet framlägges olika alternativ för atomenergins utnyttjande till civilt bruk. — Boken innehåller även ett belysande bildmaterial.

Alla som önska sätta sig närmare in i de senaste årens gigantiska landvinningar inom atomforskningens område, finna i denna bok en förträfflig orientering. Må då den växande kunskapen om möjligheterna och riskerna att frigöra de förborgade krafterna i atomernas inre driva mänskligheten att taga dem i sin tjänst till gagn och ej till förgörelse.

Eva Ramstedt.

Francis Chichester, *Star Compass*, Allen & Unwin, London 1945, pris 5s. 6d.

Stjärnkompassen, som medföljer boken, består av en liten stjärnkarta, som är vridbar kring polen och som man kan ställa in så, att den utvisar stjärnhimlen för ett visst datum och klockslag. Den skiljer sig från andra inställbara stjärnkartor däruti, att kartan täckes av en fast celluloidskiva, på vilken azimutbågarna äro utritade för var tionde grad. Azimuten eller rättare bäringen (eftersom den på kartan räknas från Norr) kan alltså avläsas för en godtycklig stjärna och enligt utgivarens åsikt med en noggrannhet på 1°. Stjärnkompassen är närmast avsedd att användas på båtar och flygplan och navigeringen tillgår då så, att navigören på stjärnkompassen utväljer en stjärna nära horisonten i samma bäring som hans kurs och sedan styr efter denna.

The Chichester Star Compass är konstruerad för latitudområdet 50°—55°. Det härigenom uppkomna felet för 60° latitud torde dock för sådana stjärnor, som kunna komma ifråga, i regel ej överstiga 2°, och kompassen kan därför rekommenderas för alla astronomiintresserade. *A. Jenvall.*

J. Barton Hoag, *Basic Radio.* The essentials of electron tubes and their circuits. Tenth printing. D. van Nostrand comp., New York 1945. 379 sid., pris inb. kr. 17:10.

Den utländska radiolitteraturen börjar nu bli tillgänglig i allt större omfattning. Den utgöres i regel av relativt utförliga verk, avsedda för fackmannen-teknikern, men där förekommer även arbeten, som äro av begränsad omfattning och ställa mindre krav på läsarens förkunskaper. I denna senare kategori fäster man sig särskilt vid Barton Hoags ovan angivna bok. Förf. är professor, Commander och chef för Department of Science vid U. S. Coast Guard Academy, vilket borgar för en vederhäftig framställning.

Radioteknisk litteratur pendlar mellan tvenne ytterligheter: en ytlig och rent av otillåtet förenklad beskrivning och en mödosam, oöverskådlig matematisk behandling. Hoag har härvid funnit en god medelväg. Boken är avsedd som lärobok för utbildning av radiotekniker i militärtjänst, men den är givetvis av värde för alla radiotekniskt intresserade.

Allt väsentligt, från de inledande kapitlen om likström och växelström fram till avancerad radioteknik, behandlas i följdriktig ordning. Följande urval ur innehållsförteckningen kan vara av intresse: elektroner och metallisk ledning, kapacitans, induktans och den elektriska svängningskretsen, strålning, olika slag av radiorör, likriktare, förstärkare och generatorer, gasfyllda rör,

fotoceller, oscillografer, radiosändare och mottagare, amplitud- och frekvensmodulering, radiopejling, matarledningar för låg- och högfrekvens, antenner. Förf. har företagit en sträng gallring i urskogen av radiotekniska kopplingar. I de sista kapitlen beskrives framställningen av odämpade centimetervågor med hjälp av de nya rörtyperna magnetron och klystron, vilka visade sig vara av stor betydelse för striden om herraväldet i luften under det sista världskriget. Varje kapitel kompletteras med ett stort antal övningsuppgifter. *Birger Grundström.*

A. G. Ward. *Colloids, Their Properties and Applications.* Blackie & Son Ltd. London & Glasgow 1945. 133 s., pris 5s.

Författarens avsikt är att giva en elementärare framställning av ämnet än den man finner i andra monografier inom detta område. Samtidigt bör arbetet kunna tjäna som inledning till studiet av kolloiderna för dem, som inte tidigare känna till dessa otroligt mångskiftande och viktiga ämnen.

Framställningen är indelad i tre partier: Det kolloida tillståndets natur, De kolloida systemen och Kolloiderna i industri och i levande organismer. Äldre arbeten, som behandla kolloiderna, äro i stort sett enbart deskriptiva; en grundval för en teoretisk behandling av kolloidläran och för en verklig förståelse av dessa gåtfulla system har givits först av atomteorien och teorien för ytfenomen. Författaren inleder också sin framställning med en kort redogörelse för de delar av atomteorien, som närmast komma till användning, alltså atomens byggnad, den homeopolära bindningen och de van der Waalska krafterna. Därefter följer en redogörelse för förhållandena vid gränsytorna i olika heterogena system. Den första delen avslutas med en översikt över de experimentella metoderna inom kolloidforskningen.

Del II upptages av en redogörelse för de lyofoba och lyofila solernas egenskaper, vidare för geler, pastor, emulsioner och skum, damm, rök och dimma. Del III slutligen behandlar i 7 kapitel: kautschuk, naturlig och syntetisk, cellulosa och därmed besläktade ämnen, proteiner, lera, fernissa och färger, rengöringsmedel och slutligen virusämnen.

Det är ett förvånande rikt innehåll författaren har lyckats få med i detta till omfånget blygsamma arbete. Ändock har den stora mängden av fakta inte tyngt framställningen, som är klar och överskådlig och framför allt tar fasta på de teoretiska grundvalarna. Arbetet kan varmt anbefallas för dem, som önska förskaffa sig en inblick i vad man med skäl skulle kunna kalla den nya kolloidläran. *G. Starck.*

Lennart Smith, *Lärobok i organisk kemi.* 3:e uppl., Svenska bokförlaget (Bonnier), Stockholm 1945, 326 s., inb. kr. 9:—.

Den nu utkomna upplagan av professor Lennart Smiths lärobok, vars första upplaga utkom 1938 (Elementa 22, 124), skiljer sig icke väsentligt från den första. Utom det att tryckfel rättats, ha en del smärre tillägg gjorts av framför allt sådant, som betingas av forskningens framsteg, såsom sulfonamid o. d. Dessa tillägg äro dock ej mera ingripande än att pagineringen nästan genomgående kunnat bibehållas. Undantag utgör dock kapitlet »Organiska biokatalysatorer», som utökats med två sidor om enzym, och det helt nyskrivna kapitlet om »Grunddragen av den moderna valensläran», i vilket på 14 sidor lämnas en klar översikt av oktett-teorien, den nya kvantamekaniken och den kemiska bindningen samt av mesomeri.

Rudolf Junell.

H. W. Harvey, *Recent Advances in the Chemistry and Biology of Sea Water.* Cambridge University Press, Cambridge 1945. 164 s., pris 10s. 6d.

Författaren är en av de främsta forskare, som på senare år arbetat med frågor rörande förhållandet mellan havsvattnets kemi och fysik samt livsbetingelserna för de i havet levande djuren och växterna. Hans nyutkomna bok bör därför mottagas med stor glädje av såväl biologer som kemister och fysiker. Boken, som är skriven av en verklig auktoritet, utgör en sammanställning av vad man för närvarande vet i dessa frågor.

I första kapitlet ges en översikt över vattnets vertikala och horisontala rörelser, havsströmmar, vattenskiktning, salthalt m. m. I all korthet omnämnas också de olika grupper av organismer, som befolka havet och havsbottnen.

Havsvattnet är ju en vattenlösning av en stor mängd salter. De rikligast förekommande jonerna äro $Na^{\cdot}$, $Mg^{\cdot\cdot}$, $Ca^{\cdot\cdot}$, $K^{\cdot}$, $Sr^{\cdot\cdot}$, Cl', SO_4'', Br', HCO_3' och CO_3'' samt borsyra. I en tabell presenterar förf. ytterligare trettiofem grundämnen, som emellertid endast förekomma mer eller mindre spårvis. För livet i havet äro de dock ej betydelselösa. Sålunda ha t. ex. en del tunga metalljoner visat sig vara absolut nödvändiga även om de kanske blott förekomma i en utspädning av 10 mg/m³.

Ett problem, som även behandlas utförligt, är det rörande de i vattnet lösta gaserna kväve, syre och koldioxid. Kvävet torde vara av mindre biologisk betydelse, så mycket större roll spela de båda andra, syret för att möjliggöra andningen, koldioxiden, förutan vilken alger och växtplankton sakna råmaterial för sin fotosyntes.

Koldioxidens löslighetsförhållanden, kolsyrans dissociation och det därmed sammanhängande värdet på havsvattnets pH är ett invecklat problem, som också behandlas klart och ingående.

Intimt förbunden med de biologiska produktionsfrågorna är fosfat- och nitrathalten, som för övrigt är starkt varierande. För dessa intressanta frågor redogöres i bokens senare kapitel liksom även för ämnesomsättningen och produktionen i havet, främst då den roll de olika planktonorganismerna därvid spela.

Hittills mycket litet kända äro de marina bakterierna och deras biologiska betydelse. Ett kapitel ägnas också dessa organismer.

Slutligen må nämnas bokens synnerligen utförliga litteraturförteckningar. *Tore Levring.*

Nautisk meteorologi och oceanografi, del 5 (s. 403—467) av *Lärobok i navigation* för Flottans undervisningsanstalter och Navigationsskolorna, utarbetad genom Chefens för marinen och Kungl. Kommerskollegiums försorg. Pris för hela läroboken c:a kr. 15.

Flera förf. torde ha bidragit till denna nautiska meteorologi och oceanografi. I företalet till navigationsläroboken nämnes kapten W. Schaefer och förste statsmeteorologen T. Bergeron. Granskning har skett på Sveriges meteorologiska och hydrologiska institut (SMHI). På 65 sidor ges här grunderna av den allmänna och synoptiska meteorologien (22 resp. 35 s.) samt oceanografien (8 s.). I kapitlet *allmän meteorologi* behandlas de olika meteorologiska elementen, temperatur, fuktighet, lufttryck, vind, moln, sikt och dimma samt nederbörd; samtidigt redogöres i korthet för de viktigaste instrumenten. På en plansch finnas fyra av doc. Bergeron utmärkt redigerade kartor, som ge fördelningen vid jordytan av temperatur, lufttryck och huvudluftströmmar under jan. och juli; på temperaturkartorna finnas också de viktigaste havsströmmarna. Huvudmolnslagen äro representerade av 12 molnbilder, som kunde varit betydligt bättre återgivna.

Den *synoptiska meteorologien* börjar med luftmassor, fronter och olika lufttrycksformer, varvid lågtrycket givetvis är utförligast behandlat. Väderlekskartors ritning och analysering genomgås liksom de viktigaste prognosreglerna. Övriga underrubriker äro tropiska orkaner, väderleks- och isunderrättelsetjänst samt meteorologisk navigering. Tre analysexempel finnas jämte lika många moderna välanalyserade väderlekskartor, som omfatta Västeuropa, Nordatlanten och delvis även Nordamerika. I *oceanografien* behandlas havens utbredning och djup, havsvattnets egenskaper, isen i havet, vågrörelse och havsströmmar.

Framställningen är tämligen koncentrerad men ändå klar. Inga

onödiga utbroderingar förekomma, och nästan varje mening är en kraftsats. Vi ha här utan tvivel en av de hittills bästa framställningarna av elementär meteorologi på svenska, givetvis i första hand avsedd för sjöfolk men en utmärkt första orientering i ämnet för en och var.

H. Henrikson.

The measurement of upper winds by means of pilot balloons, Air Ministry Meteorological Office nr. 396, third edition, London 1944, 45 sid. pris 1 s.

I den moderna väderlekstjänsten behöver man bl. a. uppgifter om vindens riktning och styrka i olika nivåer. Det enklaste sättet att få sådana uppgifter är att uppsända en liten vätgasfylld gummiballong, vars läge i rymden sedan bestämmes varje minut med hjälp av ett eller flera vinkelmätningsinstrument, teodoliter. Vanligen använder man blott en teodolit, men denna metod (enkelvisering) förutsätter, att ballongens stighastighet är känd. Föreliggande häfte är en instruktion för dylika mätningars utförande. Bl. a. genomgås utförligt det trigonometriska underlaget för beräkningen av höjdvindens riktning och styrka. De matematiska hjälpmedlen ligga helt inom skolmatematikens ram.

H. Henrikson.

Vårt dagliga ljus. Red. av Esselte Reklam i samråd med Svenska AB Philips. Lindståhls Bokhandels förlag, Stockholm 1946. 179 sid., pris inb. kr 7:25.

Detta verk utgör en populär framställning av belysningstekni-kens utveckling genom tiderna, varvid särskild omsorg ägnats åt Philipskoncernens utomordentligt betydelsefulla insatser på ifrågavarande område. Boken är sålunda delvis en reklamskrift. Den är mycket välskriven och man läser den med god behållning.

I de inledande kapitlen skildras bl. a. dragkampen mellan gaslampor och elektrisk belysning, och man förvånas över att i Stockholm ännu så pass sent som år 1926 det sammanlagda antalet gas- och oljelyktor var lika stort som antalet elektriska gatlampor. Först år 1940 släcktes den sista oljelyktan och år 1941 den sista gaslyktan i Stockholm. Edisons och andra forskares vedermödor vid framställningen av elektriska glödlampor skildras ingående, och därpå följer en med talrika fotografier illustrerad beskrivning av modern glödlampsfabrikation.

I de följande kapitlen behandlas gasurladdningslamporna och deras användning för olika belysningsändamål. Man instämmer gärna med förf., då han framhåller att ljusreklamen måste anordnas på ett estetiskt tillfredsställande sätt. Det finns tyvärr alltför

många exempel på att detta krav ej beaktas. I ett par avsnitt ges en kortfattad handledning i projektering av belysningsanläggningar samt en framställning av ljusets natur. I samband härmed kan det vara lämpligt att framhålla, att man inte utan närmare motivering bör införa ljudvågorna i ett diagram över den elektromagnetiska strålningen. Boken avslutas med en historik över Philipskoncernens utveckling. Trycket och det omfattande illustrationsmaterialet är av hög klass. *Birger Grundström.*

Bonniers Konversationslexikon, band XI, Stockholm 1945, hfrb., kr. 24:—.

Bandet omfattar *Psalmbok—Sensuell* och upptager 1576 spalter. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som äro av intresse, må nämnas: *Pyrometri*, *Radioaktivitet*, *Radium*, *Ramaneffekten*, *Relativitetsteori* (välskriven), *Renium* (smältpunkten uppgives till 3 440°; detta är riktigt, om man avser absoluta temperaturen), *Rodium*, *Rost*, *Rubidium*, *Rökgasanalys* (uppgiften att väte bestämmes i en orsatapparat genom *absorption* är ej riktig; man *förbränner* vätet och observerar kontraktionen), *Röntgenstrålar* (koncentrerad, innehållsrik), *Rörelse* (en formel är feltryckt, bör vara: $v^2 = v_0^2 + 2\,as$), *Sannolikhetskalkyl*, *Saturnus*, *Selen*, *Sensitometri*.

Uppgiften i förteckningen över medarbetare, att Lise Meitner är »prof. vid Nobelinstitutet för fysik», torde ej vara bokstavligen riktig. De fel i tidigare band, som på sin tid påpekats i Elementa, ha i allmänhet ännu ej beaktats av red. *J. Tandberg.*

Gradualavhandlingar.[1]

Harry Svensson, *Electrophoresis by the Moving Boundary Method. A Theoretical and Experimental Study.* Ark. Kem. Min. Geol. 22 A, No 10. 156 s. Disp. vid Uppsala Universitet den 9 mars 1946. Opponenter: docent K. O. Pedersen och fil. lic. B. Ingelman.

Avhandlingen behandlar elektroforesmetoden ur teoretisk, apparatteknisk och praktisk synpunkt. I första kapitlet ges en teori för joners rörelse i elektriska fält, grundad på Kohlrauschs och Webers arbeten av år 1897. De av dem uppställda differentialekvationerna kunna inte lösas för mer än tre jonslag. Genom att anta skarpa gränsytor mellan de olika vätskeskikten och behandla dem som matematiska diskontinuiteter kan emellertid problemet överföras

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

till ett rent algebraiskt. Teorin är sålunda ej tillämplig på gränsytor som utsuddas av strömmen eller som bli utsatta för konvektioner, men skarpa stabila gränsytor erbjuda det största intresset ur elektroforetisk synpunkt.

Med n st. jonslag i systemet utvecklas ur en ursprunglig skarp gränsyta n-1 gränsytor, när strömmen slutes; alltså bildas n-2 nya vätskeskikt. Dessas sammansättningar kunna beräknas på grafisk väg. Gränsytornas hastigheter kunna antingen vara identiska med någon jons hastighet eller ligga emellan två jonhastigheter. Det senare är fallet, om samma jonslag finnas å ömse sidor om gränsytan. *En* sådan falsk gränsyta bildas alltid, nämligen den med hastigheten 0, den år 1937 av Tiselius upptäckta δ-gränsytan. Konsekvensen härav är att den jon vars vandringshastighet skall mätas måste finnas i endast en av de ursprungliga lösningarna. Vidare måste man känna ledningsförmågan i det skikt nära gränsytan som innehåller jonen i fråga.

Kolloider bidraga i mycket ringa grad till ledningsförmågan men påverka i hög grad lösningens brytningsindex. Därför kan man vid optiskt mätbara kolloidgränsytor försumma ledningsförmågeförändringarna och med kännedom endast om en ledningsförmåga bestämma samtliga kolloidkomponenters vandringshastigheter. Lämpliga betingelser måste dock väljas.

I andra kapitlet beskrives elektroforesapparaturen enligt Tiselius i dess moderna utformning. Praktiska anvisningar för experimentens korrekta utförande lämnas.

Tredje kapitlet behandlar den optiska observationsmetodiken. Metoden är självregistrerande och ger på en mattskiva eller plåt en ljuskurva som representerar $\frac{dn}{dx}$ (n = brytningsindex, x = cellkoordinaten) som funktion av x. Varje kopomnent (gränsyta) kommer fram som en topp; dennas lägeförskjutning ger vandringshastigheten, och den mellan kurvan och referenslinjen inneslutna ytan är proportionell mot brytningsindex' tillväxt vid gränsytan. En elementär teori för denna metod, vars huvudelement äro en vågrät och en snedställd spalt, presenteras, och dess upplösningsförmåga beräknas genom teoretisk behandling av ljusets böjning vid snedspalten. Sedan metodens felkällor behandlats, följer en beskrivning av den optiska utrustningen, inklusive ett nytt system med konkavspegel i st. f. lins. Slutligen meddelas en handledning för optikens korrekta injustering och metoder för bestämning av apparatkonstanter.

I fjärde kapitlet verifieras experimentellt några av de teoretiska resultaten i första kapitlet. Analysmetodens tillförlitlighet under-

sökes genom analyser av syntetiska blandningar. Olika buffertypers inverkan på resultaten diskuteras teoretiskt och fastställes experimentellt. Resultaten stämma i stort sett med teorien, även om vissa diskrepanser och oklarheter kvarstå. Av dessa experiment framgår vidare det stora inflytande som bufferjonernas karaktär utöva på vandringshastigheten, och man är berättigad att draga slutsatsen att kolloiders affinitet till diffusibla joner växer med de senares storlek.

Studiet av ledningsförmågestörningarna vid elektrofores öppnar möjligheter att mäta laddningar och Hammarsten-effekter hos kolloider. I detta avseende ha emellertid endast obetydliga ansatser gjorts.

I avhandlingens sista kapitel beskrives en elektroforesapparat för preparativt bruk. Den har byggts med särskild hänsyn till bekvämlighet i handhavandet. Sålunda utsugas fraktioner genom kapillärer å U-rörets väggar, ny substans pressas in genom botten, och såväl ifyllning som tömning av buffer sker på platsen i termostaten utan att apparaten behöver lyftas upp och tas isär.

Sigvard Eklund, *Studies in Nuclear Physics. Excitation by Means of X-Rays. Activity of* ^{87}Rb. Stockholm 1946, 79 sid. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 33 A, N:o 14. Disp. vid Uppsala Universitet den 27 april 1946. Opponenter: docent Per Ohlin, Uppsala och professor Hilding Slätis, Åbo.

Franska och amerikanska forskare visade ungefär samtidigt år 1939, att man genom bestrålning av atomkärnor med energirik (ca 2 MeV) röntgenstrålning kan excitera dem till över grundnivån liggande metastabila nivåer. De sålunda exciterade kärnorna, som skilja sig från sådana, som icke bestrålats endast genom sitt högre energiinnehåll och därför sägas vara isomera till dessa, utsända vid övergång till grundtillståndet en mjuk γ-strålning med en energi, som i de hittills observerade fallen ligger mellan 20 och 250 keV. I en 1943 publicerad avhandling har professor Trumpy i Bergen redogjort för resultaten av bestrålning av en rad olika element med röntgenstrålning, varvid han i samtliga fall ansett sig kunna påvisa nya isomera kärnor. Den energi hos röntgenstrålarna, som erfordrades för att överhuvud framkalla isomeri bestämdes av Trumpy i många fall till mindre än 400 keV.

Författarens undersökning har haft till syfte att studera dessa vid relativt låg energi hos den infallande strålningen uppträdande fall av isomeri.

I kap. I redogöres för den apparatur, som byggts för alstringen av röntgenstrålningen och som utgöres av ett kaskadkopplat hög-

spänningsaggregat för max. 400 kV likspänning och ett därtill hörande mätmotstånd å 1000 MΩ för mätning av spänningen. Till aggregatet är anslutet ett accelerationsrör för acceleration av elektroner eller joner. Röret, som hittills endast använts som röntgenrör är försett med anordningar för fokusering av elektronstrålen och kontroll av brännfläckens storlek.

För mätning av energisvag strålning från radioaktiva preparat har ett särskilt Geiger-Müller-rör konstruerats (kap. II), där den eljest betydande absorptionen i rörväggen i hög grad elimineras genom att röret utgöres av ett nät. Geiger-Müller-rörets elektroder samt det radioaktiva preparatet äro inneslutna i en behållare, som fylles med lämplig gasblandning. I den använda preparatuppställningen motsvarar absorptionen i röret endast ca 3μ Al.

I kap. III redogöres för försök där bl. a. Cu, Rh, Cd, In, Sn, Au och Pb upprepade gånger bestrålats med röntgenstrålning, då röret belastats med max. 5 mA. I intet fall erhölls någon effekt. Med ett Geiger-Müller-rör, vars katod utgjordes av ett på våta vägen utfällt silverskikt erhölls en effekt av samma storleksordning som rörets nolleffekt, och detsamma var förhållandet med ett visst Geiger-Müller-rör av aluminium. Försök med bestrålning av aluminium i form av plåt och mätning i det tidigare beskrivna Geiger-Müller-röret gav icke någon effekt.

De erhållna negativa resultaten diskuteras med hänsyn till att Trumpy uteslutande bestrålat Geiger-Müller-rör, vilka emellertid som Roggen och Scherrer visat under inflytande av en intensiv röntgenstrålning kunna uppvisa en betydande efterverkan av icke nukleärt ursprung.

Vid bestrålning av ett material med snabba elektroner reflekteras en stor del av den infallande elektronstrålningen. I kap. IV är en anordning angiven för mätning av den s. k. rediffusionskonstanten. Mätanordningens egenskaper diskuteras och resultatet av mätningar i energiintervallet 50—370 keV anges för 9 olika element mellan Be och Pb. Konstantens värde är 0,05 för Be och 0,58 för Pb.

Helium-blymetoderna för bestämning av radioaktiva minerals ålder ha på senare tid visats innehålla stora felkällor. Av bl. a. Hahn har påpekats möjligheten att göra åldersbestämningar genom mätning av halten av ^{87}Sr i rubidiumhaltiga, på naturligt strontium fattiga mineral. Rubidiumisotopen 87 sönderfaller nämligen till ^{87}Sr med en halveringstid, som enligt äldre mätningar uppgår till $4{,}5—12 \cdot 10^{10}$ år. En nybestämning av denna halveringstid har utförts (kap. V) med det härför lämpade, tidigare omnämnda Geiger-Müller-röret, varvid rymdvinkeln bestämts med ett uranpreparat. Genom att använda rubidiumpreparat, vilkas tjocklek varierat

mellan 0,2—4,5 mg Rb-element/cm² har det varit möjligt att extrapolera till skikttjockleken noll och därmed eliminera den absorption, som rubidiumstrålningen undergår i det egna skiktet. Enligt denna mätning är halveringstiden för ^{87}Rb $5{,}8 \pm 1{,}0 \cdot 10^{10}$ år. Ur kemiska analyser av mineralet rubidiummikroklin i pegmatit från Varuträsk utförda av det geokemiska laboratoriet vid Bolidens Gruv A.B. kan man ur ovanstående halveringstid beräkna mineralets ålder till 1740 ± 520 milj. år.

Föredrag under våren 1946 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Lunds Matematiska Sällskap, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. S. B. Nilsson.

Föredrag: fil. mag. Thorild Dahlgren j:r (21/2); prof. C.-E. Quenzel, Normalkurvans roll i statistiken (26/4).

Kemiska Föreningen, ordf. docent K. J. Karrman, sekr. fil. mag. Torsten Nilsson.

Föredrag: fil. lic. Tore Nilsson, Några sultoner, deras framställning och hydrolys (15/2); apotekare H. Haine, Den svenska farmakopén (29/3). Vid sammanträde 11/5, då föreningen gästades av Kemisk Forening i Köpenhamn: Dr. Phil. K. J. Pedersen, En reaktionskinetisk virkning, der skyldes komplexdannelse; Dr. Phil. Jacob Blom, Om dannelse af trisaccarid ved nedbrytning af stivelse med pancreasamylase: prof. B. Holmberg, Sockerseparingar; fil. dr Tore Nilsson, Sultoner.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. kand. Olof Hanner.

Föredrag: fil. lic. J. Billing, Är $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$? (19/3).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. A. E. Lindh, sekr. fil. dr fru Anna Beckman.

Föredrag: civilingenjör Per Olof Fagerholm, Något om fotogrammetrien och dess nyaste utveckling (26/2).

Föredrag vid årsmötet i januari, se Elementas marsh. s. 32.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Hulthén, sekr. docent N. Svartholm.

Föredrag: docent Einar Lindholm, Teorien för spektrallinjers breddning (25/2); civilingenjör Gunnar Svala, Klystron- och magnetronrör i teori och praktik (18/3); fil. lic. Ebbe Kronqvist, Kallbearbetningens inverkan på magnetiska atommomentet hos vissa metallegeringar (13/5), fil. mag. Hugo Atterling, Radioaktiv omvandling genom infångning av elektroner från elektronhöljet (3/6).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. docent L.-G. Sillén.

Föredrag: docent H. Willstaedt, Cis-trans-isomeri i kromatografien (3/2), prof. T. Caspersson, Cytokemiska studier av kärnorganisationen hos vissa lägre organismer (7/3); prof. H. v. Euler, Några nyare rön

Forts. s. 116.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1452) *Om n är ett positivt helt tal* > 2, *vilket helt tal ligger då närmast a)* $1 : (2n - \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$? *b)* $1 : (20 - \sqrt[10]{10^{10}+1} - \sqrt[10]{10^{10}-1})$?

X.

1453) *Lös ekvationerna* $\frac{\cos^3 a}{\cos x} + \frac{\sin^3 a}{\sin x} = 1$ *och* $\frac{\cos^3 x}{\cos a} + \frac{\sin^3 x}{\sin a} = 1$.

X.

1454) *Bevisa, att en sexhörning är regelbunden, om den kan inskrivas i en cirkel och omskrivas kring en annan samt har två par motstående sidor parallella.*

N. J.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1455) Lös ekv. $x - \sqrt{x - \sqrt{x}} = 1$.

Svar: $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}555$.

1456) Summera serien $1 \cdot p + 2 \cdot (p+1) + 3 \cdot (p+2) + \ldots + n \cdot (p+n-1)$.

Svar: $\frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+3p-2)$.

1457) I en triangel ABC träffar bissektrisen från B sidan AC i punkten D, varvid $BD = AC$ och vinkeln $ADB = 30°$. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: $A = 137{,}85°$, $B = 24{,}30°$, $C = 17{,}85°$.

1458) Bestäm vinkeln A i en triangel, i vilken man känner h_a, r_a och b_a, där b_a är inre bissektrisen till vinkeln A.

Svan: $\sin \frac{A}{2} = \frac{h_a \cdot r_a}{b_a(h_a + r_a)}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1455—1462 äro insända av *B. Svenonius*, 1463—1466 av *T. Edqvist*, 1467 av *O. E.*

1459) Bestäm vinkeln C i en triangel, i vilken man känner h_a, h_b och b_c.

Svar: $\sin\frac{C}{2} = \frac{h_a \cdot h_b}{b_c(h_a + h_b)}$.

1460) Punkterna (0; 0) och (6; 8) utgöra mittpunkter på två sidor i en romb, vars ena diagonal ligger längs linjen $2y = x + 5$. Bestäm koordinaterna för rombens hörn.

Svar: $(-5; 0)$; (1; 8); (11; 8); (5; 0).

1461) Kurvan $y = x^3 - 21x + 1$ skäres av en rät linje parallell med x-axeln, så att de två successiva kordor som uppkomma förhålla sig som 1:2. Sök linjens ekvation.

Svar: $y = 21$ eller $y = -19$.

1462 En rät linje parallell med x-axeln skär kurvan $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ i tre punkter, så att avståndet mellan de två yttersta av dessa är ett maximum. Angiv maximiavståndet.

Svar: $\frac{2}{3}\sqrt{3a^2 - 9b}$. Linjen går genom inflexionspunkten, emedan tangenterna i ändpunkterna äro parallella.

1463) Basytan i en pyramid är en kvadrat med sidan a. Höjden som även har längden a går genom ett av kvadratens hörn. På vilket avstånd från basytan skall en punkt tagas på höjden, för att summan kvadraterna på dess avstånd från 1) samtliga kanter, 2) samtliga begränsningsytor skall bli ett minimum?

Svar: $\frac{5a}{17}$ i första och $\frac{a}{2}$ i andra fallet.

1464) Kurvorna $y = 3x^2 + bx + c$ och $y = x^3 + bx$ äga i en viss gemensam punkt en gemensam tangent. Beräkna konstanten c.

Svar: $c = 0$ eller $c = -4$.

1465) I funktionen $y = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3} + bx$ är $a = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Tangenterna i inflexionspunkterna bilda rät vinkel med varandra. Beräkna konstanten b.

Svar: $b = 1$.

1466) Ett klot är inskrivet i en kub med kanten a. Beräkna radien i det klot, som tangerar det nämnda klotet samt dessutom tre av kubens sidoytor.

Svar: $\frac{a}{2}(2 - \sqrt{3})$.

1467) I en ellips är lillaxeln konstant. Från dess ena ändpunkt drages en normal till linjen genom ena fokus och lillaxelns andra ändpunkt. Den erhållna rätvinkliga triangeln roterar kring lillaxeln. För vilken excentricitet hos ellipsen blir rotationskroppens volym så stor som möjligt?

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösn. till uppg. 1420—1422.

1420) *Ett obegränsat utdraget prismas normalsnitt har formen av en liksidig triangel. Prismat kan på två olika sätt skäras med plan, så att likbenta trianglar uppkomma. Två sådana trianglar antagas ha lika stora ytor. Undersök, hur vinklarna mellan två sådana plan variera.* *B. Svenonius.*

Två plan, som i prismat utskära likbenta, likytiga trianglar, bilda lika vinklar med ett tvärsnitt ABC (enl. en känd projektionssats) och äro, om de ej bägge äro tvärsnitt, parallella med *en* sida eller *en* höjd i detta. Om i snittet AB_1C_1 sidan $AB_1 = AC_1$, är antingen B_1C_1 och BC parallella eller också går B_1C_1 genom mittpunkten av BC. Parallellförflyttas de båda planen så, att de gå genom en godtyckligt vald punkt i planet ABC, bilda deras spår l_1 och l_2 i detta plan alltså icke-trubbiga vinklar med något av värdena 0°, 30°, 60°, 90°.

Låt först två av vinklarna mellan l_1 och l_2 vara spetsiga, vardera $= \alpha (> 0°)$. Skärningslinjen mellan de sammanhörande planen π_1 och π_2 genom l_1 och l_2 resp. genomvandrar de båda normalplan till ABC, som halvera vinklarna mellan l_1 och l_2 (»bissektrisplanen»), medan snittytan växer från $\triangle ABC$ till $\sim$. De icke-trubbiga vinklarna mellan π_1 och π_2 variera samtidigt från 0° till 90° och tillbaka till α (exklusive) för det ena bissektrisplanet och från 0° till α (exklusive) för det andra. Tag för att inse detta P_1 på l_1 och P_2 på l_2, symmetriskt med avseende på ett bissektrisplan, och betrakta den likbenta triangeln med basen P_1P_2, som har sina lika sidor på normalerna till π_1 och π_2 i P_1 och P_2 resp. samt spetsen på en fix normal till planet ABC. I gränsfallen $\alpha \to 0°$ och $\alpha \to 90°$ uppträda endast första, resp. andra variationsformen. *X.*

1421) *Visa, att* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}$. *Per Olof Fröman.*

Man bevisar lätt formeln $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

Alltså är $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} =$

$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{m+1}\right) =$

$= \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

Löst av *Lars Krogset, Anders Lódemel, O. H. Sælen.*

1422) *En rymdpolygons sidor delas av ett plan i segmenten* $a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n$ *i ordning tagna. Vilken relation består mellan dessa segment, om segmenten räknas med samma tecken vid inre, med motsatta tecken vid yttre delning.* *N. Juringius.*

Fällas normaler $l_1, l_2, l_3 \ldots$ från hörnen mot planet, erhålles, om alla delas utantill, $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{l_1}{l_2}, \frac{a_2}{b_2} = -\frac{l_2}{l_3} \ldots \frac{a_n}{b_n} = -\frac{l_n}{l_1}$, varav $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = (-1)^n b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$. Antalet sidor som kan delas innantill måste vara jämnt, varför samma resultat erhålles i det allmänna fallet. *S. B.*

Forts. från s. 112.

om tillväxt- och hämningssubstanser samt om Synpunkter betr. undervisning och utbildning i organisk kemi (4/4); laborator E. Adler, Reaktionen mellan kolhydrater och sulfit och deras roll vid sulfitcellulosaprocessen (16/5).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. C.-G. Esseen, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Föredrag: fil. lic. Arne Broman, En metod för approximativ beräkning av Fourierkoefficienter och bestämda integraler (27/5).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent S. v. Friesen, v. ordf. docent P. Ohlin.

Föredrag: Prof. J. C. Jacobsen, Köpenhamn, Egna arbeten rörande energin vid betarekylen samt andra experimentella arbeten vid Köpenhamns universitets institut för teoretisk fysik (16/2); Dr. Phil. J. K. Boggild, Köpenhamn, Sønderdeling af lette Grundstoffer med langsomme Neutroner (15/4); docent K. G. Malmfors, Studier av norrskenets uppkomst genom modellförsök (22/5).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. kand. Per-Olof Kinell.

Föredrag: Prof. Jean Roche, Marseilles, Quelques recentes acquisitiones sur la biochemie générale des phosphatases (1/3); Dr. Phil. Andreas Klit, Om möjligheterna till separering genom destillation (14/5); civiling. G. Philipson, Reseintryck från amerikansk kemisk industri (13/6).

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars—april 1946.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} - y = 0, \\ y - \frac{1}{y} - x = 0. \end{cases}$$

2. En oändlig divergent geometrisk series kvot är en enhet större än första termen. Den serie, som bildas av termernas inverterade värden, är konvergent och har summan $\frac{1}{9}$. Vilken är den ursprungliga serien?
3. I triangeln ABC är vinkeln A rät, sidan AB 15 cm och sidan AC 20 cm. Hypotenusan förlänges över B med ett stycke $BD = 26$ cm, och D förenas med A. Sök vinklarna i triangeln ABD.
4. I den liksidiga triangeln ABC med sidan 10 cm skär en transversal sidorna AB och AC i D respektive E. Ytorna av triangeln ADE och fyrhörningen $DBCE$ förhålla sig som 2 : 3, och sträckan ED är 7 cm. Beräkna längden av AE och AD.
5. I fyrhörningen $ABCD$ äro AB och CD vardera 3 cm, AD 8 cm samt vinkeln A 60° och vinkeln B 110°. Beräkna vinklarna C och D i de båda fall, som äro möjliga.
6. I en likbent triangel tangerar den inskrivna cirkeln en av de lika stora sidorna i en punkt, som ligger mitt emellan triangelns spets och skärningspunkten mellan sidan och bissektrisen till den motstående vinkeln. Beräkna triangelns vinklar.
7. När en kropp kastas rätt uppåt med en viss begynnelsehastighet, kommer dess höjd (y meter) över utgångsläget att vara en funktion av tiden (x sekunder) från rörelsens början. Denna funktion blir av formen

$$y = ax - bx^2,$$

där a och b äro konstanter. Vid ett visst kast var kroppens höjd 35 m efter 1 sek och 60 m efter 2 sek. Beräkna härav a och b. Bestäm därefter medelst grafisk metod eller på annat sätt den största höjd, som kroppen når, innan den börjar falla.

8. Ekvationen

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-2},$$

där a betecknar ett givet godtyckligt tal, ger vid förenkling i allmänhet en ekvation av andra graden. Lös denna ekvation. För vissa värden på a kan det dock inträffa, att man erhåller en ekvation av lägre grad, förutsatt att man vid förenklingen använder nämnarnas *minsta* gemensamma dividend. Ange dessa a-värden, och bestäm för vart och ett av dem, där så är möjligt, det x-värde, som satisfierar ekvationen.

Resultat: **1.** $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 3; 12; 48 ... **3.** Vinklarna *ABD*, *DAB* och *BDA* äro resp. 126,87°, 34,20° och 18,93°. **4.** 8 cm och 5 cm. **5.** $C=28{,}46°$ och $D=161{,}54°$ eller $C=151{,}54°$ och $D=38{,}46°$. **6.** 36°, 36° och 108°. Sättes basvinkeln $=2\alpha$, så bildar bissektrisen vinkeln 3α med motst. sida. Då blir även halva toppvinkeln $=3\alpha$, varför $10\alpha=180°$, $\alpha=18°$. **7.** $a=40$, $b=5$, $y=40x-5x^2=80-5(x-4)^2$, varav $y_{\max}=80$ för $x=4$. **8.** $x=2\pm\sqrt{8-4a}$. För $a=\pm 2$ erhålles vid förenkling en ekv. av lägre grad. För $a=2$ saknas rot, för $a=-2$ blir $x=6$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. Ekvationerna för två sidor i en triangel äro $2x+y-9=0$ och $x+2y+6=0$. Den kring triangeln omskrivna cirkelns medelpunkt är belägen i punkten (6; 2). Bestäm den tredje sidans ekvation.
2. Genom mittpunkten M på sidan AB i den liksidiga triangeln ABC drages en linje, som skär AC i D och förlängningen av BC i E, så att $MD=DE$. Beräkna vinkeln AMD.
3. I en konvergent oändlig geometrisk serie med reella termer är summan av första och fjärde termen $\frac{19}{8}$ och produkten av de fyra första termerna $\frac{729}{64}$. Beräkna seriens summa.
4. Lös ekvationen $(\sin x+\cos x)^3=\sin 3x+\cos 3x$.
5. I en rät cirkulär kon är avståndet mellan den inskrivna sfärens medelpunkt och en punkt på basytans omkrets medelproportional till de in- och omskrivna sfärernas radier. Bestäm konens toppvinkel.
6. Konstruera kurvan $y=x-\frac{x^3}{3}$. Bestäm sedan konstanterna a och b så, att kurvan $y=ax^3-bx$ skär den förra i tre punkter

och tangenterna till de båda kurvorna i var och en av dessa skärningspunkter bli vinkelräta mot varandra. Upprita även den eller de på detta sätt erhållna kurvorna.

7. Summan av en regelbunden sexsidig pyramids samtliga begränsningsytor är lika med en given konstant a^2. Beräkna volymens största möjliga värde samt basytans storlek, när volymen antar detta värde.
8. *A*, *B*, *C* och *D* äro fyra punkter på jordytan så belägna, att kortaste avståndet längs jordytan mellan två av punkterna blir detsamma, vilka av de fyra punkterna man än väljer. Punkten *A* har latituden 90° N, punkten *B* longituden 0°. Bestäm longitud och latitud för punkterna *C* och *D*. Jorden antages vara en sfär. Kortaste avståndet längs jordytan mellan två punkter på denna är avståndet längs storcirkelbågen genom punkterna.

Resultat: **1.** $9x - 2y + 18 = 0$. **2.** 79,11°. Drag genom M en med AC parallell transversal. Sättes triangelns sida $= 8$, blir $CD = 2$, $AD = 6$. Fälles normalen från D mot AB, fås omedelbart $\operatorname{tg} \sphericalangle AMD = 3\sqrt{3}$. **3.** $2\frac{1}{10}$. **4.** $n \cdot 180°$; $108{,}43° + n \cdot 180°$. **5.** 28,96°. Låt AB vara en basdiam. och C konens topp. En cirkel genom A, B och den inskrivna cirkelns centrum, I, har sin medelp., M, på den omskrivna cirkeln. Enl. lydelsen är $\overline{IA}^2 = R \cdot r$ och enl. en känd sats $\overline{IA}^2 = 2IM \cdot r$, varav $2IM = R$; $\sin \sphericalangle ACM = \frac{AM}{2R} = \frac{IM}{2R} = \frac{1}{4}$. **6.** $a = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$, $b = 1$. Den givna kurvan har max. i $\left(1; \frac{2}{3}\right)$ och min. i $\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$. De övriga kurvorna ha max. i $\left(-\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{3}\right)$ och min. i $\left(\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{3}\right)$, där lika tecken höra samman. **7.** Basytan $= \frac{a^2}{4}$; volymen $= \frac{a^3\sqrt[4]{27}}{36}$. **8.** 120° O och V; 19,47° S; *A*, *B*, *C*, *D* äro hörn i en regelbunden tetraeder.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. En ellips och en hyperbel ha gemensamma brännpunkter och parametrar. Visa, att den ena kurvans excentricitet är det inverterade värdet av den andras.
2. En parabel, vars axel är parallell med x-axeln, tangerar de räta linjerna $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$ och $2x - y - 3 = 0$. Bestäm parabelns ekvation.

3. En sträcka av given längd glider med sina ändpunkter utefter två räta linjer, som skära varandra under rät vinkel. Sök och konstruera orten för tyngdpunkten i den triangel, som bildas av sträckan och de stycken den avskär av de båda räta linjerna.
4. Kurvan $y = x^3 + x(a^2 - 2a)$ har olika utseende, beroende på värdet av konstanten a. Bestäm kurvans eventuella maximi- och minimipunkter, inflexionspunkter samt skärningspunkter med x-axeln. Ange med tillhjälp härav, vilka huvudtyper kurvan uppvisar och för vilka värden på a de olika typerna förekomma.
5. Härled ekvationen för diametern till kordor med given vinkelkoefficient i hyperbeln $xy = a^2$. Visa, att denna diameter även är diameter till kordor med samma vinkelkoefficient i hyperbeln $xy = -a^2$. Bestäm därefter ytan av en triangel, som har ett hörn i origo och de båda andra hörnen i punkter, där ett par konjugatdiametrar råkar de båda hyperblerna.
6. I den rätvinkliga triangeln ABC är hypotenusan AC en längdenhet. Med AB som diameter uppritas en halvcirkel, som skär AC i punkten E. Bestäm medelst grafisk metod vinkeln A på 0,1° när, då cirkelbågen BE är så stor som möjligt.
7. Bestäm en bruten rationell funktion $y = f(x)$ av lägsta möjliga gradtal, vilken är så beskaffad, att motsvarande funktionskurva har två asymptoter, $x = 1$ och $x + y = 1$, och inflexionspunkt i punkten $(-1; 1)$. Konstruera därefter kurvan.

Resultat: **2.** $(y + 2)^2 = 8(x - 1)$. De båda förstnämnda tangenterna äro vinkelräta mot varandra och råkas därför på styrlinjen, vars ekv. alltså är $x = -1$. Axelns ekv. är $y = -2$. Den del av en tangent som begränsas av två symmetriskt belägna tangenter halveras av vertextangenten, vars ekv. i vårt fall blir $x = 1$; parametern är alltså 8. **3.** Med de givna linjerna som koordinataxlar blir orten cirkeln $9x^2 + 9y^2 = l^2$, där l är sträckans längd. **4.** I. $a^2 - 2a > 0$, dvs. $a < 0$ eller $a > 2$; $y' > 0$. Inflex.tang. har positiv vinkelkoeff.; kurvan skär x-axeln endast i centrum (som för alla kurvtyper ligger i origo). II. $a^2 - 2a < 0$, dvs. $0 < a < 2$. Inflex.tg:s vinkelkoeff. är negativ; tre skärningsp. med x-axeln; ett max. och ett min. III. $a^2 - 2a = 0$; kurvans ekv. är $y = x^3$. **5.** Diameterns ekv. är $y = -kx$, om kordornas vinkelkoeff. $= k$; triangelns yta $= a^2$. **6.** 49,3°. **7.** Av de båda alternativen $y = 1 - x + \frac{A}{x-1}$ och $y = 1 - x + \frac{Ax + B}{(x-1)^2}$ förkastas det förra såsom varande en hyperbel. Det senare ger $y = \frac{x^2(3-x)}{(x-1)^2}$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1 och 3—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En parallellepipedisk låda, som väger 80 kg, står på det horisontella golvet i ett rum. En trissa C är fäst i taket mitt över lådan och en annan trissa B i väggen mitt för en av de vertikala sidoytorna. Ett rep fästes vid denna sidoytas mittpunkt A och ledes över de båda trissorna. Mellan A och B går repet i riktning av sidoytans normal, från C hänger det ned ett stycke. En person, som väger 70 kg, ställer sig på lådan och börjar draga rätt nedåt i den nedhängande repändan. Hur stor kraft måste han minst använda för att rubba lådan, om friktionskoefficienten mellan lådan och golvet är 0,25? Repets tyngd och friktionen i trissorna lämnas ur räkningen.
2. En person ville skaffa sig en uppfattning om det motstånd, man vid cykling har att övervinna till följd av friktion o. d. Han uppmätte en vägsträcka av 45 m i en rak och jämnt sluttande backe med 2,1° lutningsvinkel. Sittande på cykeln utan att vidröra pedalerna lät han sedan cykeln rulla utför backen. Han fann, att det åtgick 19,0 sek för att utan begynnelsehastighet tillryggalägga den uppmätta sträckan. Då denna del av vägbanan var av god och likartad beskaffenhet och vindstilla rådde, ansåg han sig kunna förutsätta, att rörelsen var likformigt accelererad. Beräkna under denna förutsättning motståndet mot cykelns rörelse, uttryckt i kgf. Cyklisten och cykeln väga tillsammans 90 kg.
3. Statens Järnvägars nya snälltågslok ge en för tågsättets framförande disponibel effekt av maximalt 3 500 hk och äro avsedda för en maximal hastighet av 135 km/tim och en maximal dragkraft av 18 tonf. Alla tre maximivärdena kunna dock icke uppnås samtidigt. Rita en kurva, som visar, huru hastigheten (uttryckt i km/tim) och dragkraften (uttryckt i tonf) bero av varandra, om effekten antages ha sitt högsta värde. Av teckningen skola framgå dragkraften vid maximal hastighet och hastigheten vid maximal dragkraft, men kurvan får icke upptaga värden, som svara mot högre hastighet eller högre dragkraft än den maximala.
4. Vid en bestämning av smältvärmet för svavel begagnades följande försöksanordning. I ett värmeskåp, vars temperatur kunde regleras på lämpligt sätt, ställdes vertikalt en termosflaska, innehållande paraffinolja. Flaskan var försedd med om-

rörare och termometer och avsedd att fungera som kalorimeter. I oljan var nedsänkt ett litet provrör, tillslutet med en propp. Från början innehöll provröret endast en uppvärmningsspiral av konstantantråd om 3,60 Ω, vars tilledningstrådar dragits genom provrörets och termosflaskans proppar. Värmeskåpets temperatur inställdes på ett gradtal något under svavlets smältpunkt. Sedan hela apparaturen antagit värmeskåpets temperatur, sändes under 390 sek en ström av 0,82 A genom konstantantråden, vilket medförde, att temperaturen i kalorimetern steg 4,15°. Försöket upprepades, sedan man infört 9,5 g svavel i provröret. Uppvärmningstiden var oförändrat 390 sek; strömstyrkan åter var denna gång 1,00 A. Härvid smälte svavlet fullständigt, och på termometern avlästes en temperaturstegring av 4,20°. Vilket värde på svavlets smältvärme erhålles ur dessa observationer? Svavel antages ha specifika värmet 0,22 cal per g och grad i såväl fast som flytande form. Värmeutbytet mellan värmeskåpet och termosflaskan kan lämnas ur räkningen.

5. På en optisk bänk uppställas i ordning en ljuskälla, en skärm med en springformig öppning, en tunn spridningslins och tätt intill denna en tunn samlingslins samt slutligen en avläsningskikare, som är inställd för seende på oändligt avstånd. Linsernas och kikarens optiska huvudaxlar sammanfalla. När avståndet mellan springan och linserna är 67 cm, ser observatören i kikaren en skarp bild av springan. Borttages spridningslinsen, blir bilden oskarp, men om därefter skärmen med springan flyttas 27 cm närmare samlingslinsen, erhålles åter en skarp bild i kikaren. Beräkna spridningslinsens styrka, uttryckt i dioptrier.
6. Man ville på optisk väg bestämma den inre diametern i ett tjockväggigt, cirkulär-cylindriskt glasrör. Röret placerades vertikalt och genomlystes med en på lämpligt avstånd bakom röret uppställd natriumlåga. Omedelbart framför röret anbragtes en horisontell glasskala. Det hela betraktades genom en avläsningskikare, som uppmonterats några meter från röret. Kikarens optiska axel var vinkelrät mot rörets axel och vinkelrät mot glasskalan. I kikaren avtecknade sig rörets båda cylinderytor på skalan, den inre cylindern dock väsentligt förstorad på grund av brytningen i glaset. Avläsningen gav för den yttre diametern värdet 8,00 mm och för den skenbara inre diametern värdet 6,00 mm. Beräkna rörets verkliga inre diameter.
7. Fyra klämskruvar äro placerade så, att de bilda hörnen i en kvadrat *ABCD*. Mellan *A* och *B* är ett motstånd av storleken 5 Ω inkopplat och likaså mellan *C* och *D*. Mellan *B* och *D* in-

kopplas ett batteri, vars elektromotoriska kraft är 32 V. Totala motståndet i ledningen *BD* är 3 Ω. Batteriets positiva pol är ansluten till *B*. Ett likadant batteri inkopplas mellan *A* och *C* med positiva polen ansluten till *C*. Även i ledningen *AC* är totala motståndet 3 Ω. Om nu en voltmeter inkopplas mellan *B* och *C*, vad visar den?

8. Man ville bestämma fasförskjutningen mellan spänning och strömstyrka i en järnfri strömspole, som matades med 50-periodig, rent sinusformad växelström. Spolen, vars motstånd för likström var 40 Ω, var seriekopplad med ett reglerbart motstånd och en varmtrådsampèremeter mellan anslutningsklämmorna till växelströmskällan; ampèremetern angav strömstyrkans effektivvärde. Parallellt med spolen var en glimlampa inkopplad, om vilken man visste, att den tändes varje gång spänningen mellan dess elektroder uppgick till 96 V eller därutöver. Lampan lyste först inte, men då det reglerbara motståndet långsamt minskades, tändes den vid en viss inställning. I detta ögonblick avlästes på ampèremetern 1,5 A. Beräkna den sökta fasförskjutningen. Motståndet i glimlampan är mycket stort.

Resultat: **1.** 30 kgf. **2.** 1,0 kgf. **3.** Kurvans ekv. är $F \cdot v = 945$, där F är dragkraften i tonf och v hastigheten i km/tim. Dragkraften vid max.hastighet är 7,0 tonf, hastigheten vid max.dragkraft är 52,5 km/tim. **4.** 10,4 cal/g. **5.** — 1,0 dioptrier. **6.** Rörets inre diam. är 4,22 mm under förutsättning att det infallande strålknippet är parallellt, vilket borde ha angivits i uppgiften. Metoden beskrives i Kohlrausch, Praktische Physik, 17:e uppl. (1935), s. 60. **7.** 0 V. **8.** 28°.

Realexamen V. T. 1946.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{7}{3-3x} - \frac{4x+19}{3-3x^2} + \frac{x}{1-2x+x^2} = 0.$$

2. En köpman i Göteborg inköpte ett parti kaffe från New York till ett fakturapris av 50 cents per kg. Kostnaderna för frakt, tull m. m. uppgingo till 16 % av fakturapriset. Vilket försäljningspris åsatte köpmannen kaffet, då han beräknade 25 % påläggg? 1 dollar = 100 cents = 4,00 kr.
3. En person köpte den 15 oktober ett år några aktier å nominellt 50 kr för 82,50 kr per st. Den 15 mars följande år sålde han dem till 170 % kurs, efter det att han samma dag erhållit 3 kr i

utdelning på varje aktie. Hur många procents ränta kan han sägas ha haft på sitt utestående kapital, om kursvinsten inräknas i ränteavkastningen?

4. Två orter *A* och *B* ligga vid en landsväg 90 km från varandra. Från *A* utgingo kl. 8 två bussar med samma hastighet, den ena i riktning mot *B*, den andra i motsatt riktning. Kl. 9 avgick en personbil från *B* i riktning mot *A* och fortsatte utan uppehåll förbi *A*. Personbilen, som körde exakt samma sträckor som respektive bussar, mötte den ena kl. 9.30 och upphann den andra kl. 15.30. Beräkna fordonens medelhastigheter.
5. En idrottsplan har formen av en 60 m bred och 100 m lång rektangel med halvcirklar på kortsidorna. Omedelbart utanför denna plan och runt om densamma ligger en löparbana, som överallt är 6 m bred. Löparbanan skall beläggas med ett 3 cm tjockt lager kolstybb. Hur många hektoliter kolstybb åtgår härför? $\pi = 3{,}14$.
6. En nautisk mil är 1 minut av jordekvatorn. Hur många kilometer är den nautiska milen, om jordens radie är 637 mil? I en sjömilitär rapport uppgavs, att 50 nautiska mil skulle vara ungefär 90 km. Hur mycket avviker denna uppgift från det riktiga värdet? Beräkna avvikelsen i procent av sistnämnda värde. $\pi = 3{,}14$.
7. En förtöjningsboj för båtar består av två koner med de lika stora baserna vända mot varandra. Bojens diameter är 6 dm och dess totala höjd 10 dm. Den övre konens höjd är $\frac{2}{3}$ av den undres. Bojen är hopsvetsad av järnplåt, som väger 20 kg/m^2. Ingen skiljevägg finns inuti bojen. Beräkna bojens vikt. $\pi = 3{,}14$.
8. Basen i en likbent triangel är 15 cm och var och en av de lika stora sidorna 12,5 cm. I triangeln inskrives en cirkel, och parallellt med basen drages en transversal, som tangerar cirkeln. Beräkna längden av denna transversal.

Resultat: **1.** $x = \frac{2}{3}$. **2.** 2,90 kr/kg. **3.** 16 %. **4.** Buss och personbil resp. 40 och 60 km/tim. **5.** 733 hl. **6.** 2,8 % nedåt. **7.** 22,1 kg. **8.** 3,75 cm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

Obs. Lösningarna till uppgifterna nr 2 och 5—7 böra vara försedda med enkla figurer.

1. Till en ny maskin har man förfärdigat en modell i längdskalan 1 : 10. Modellen är av trä med specifika vikten 0,80 och väger 400 g. Maskinen skall tillverkas av stål med specifika vikten 7,7. Hur mycket kan maskinen beräknas väga?

2. En metallwire är uppspänd mellan två krokar, fastsatta i samma höjd. När den på mitten belastas med en vikt av 10 kg, sträckes den, och mittpunkten sänkes 5 cm under förbindelselinjen mellan krokarna. Wirens längd är då 2 meter. Med hur stor kraft verkar wiren på vardera kroken?
3. Vid ett bygge ligger en sten, som väger 200 kg, och det är meningen att lyfta den med ett rep, som slagits kring stenen och letts över en trissa rakt ovanför. Några pojkar komma till stället. Då ingen annan är i närheten, hugga de tag i repet och börja hissa upp stenen. Med gemensamma krafter hålla de den 0,9 m över marken, då de få se en arbetare närma sig. Alla utom en släppa då repet och springa sin väg. Den återstående pojken, som väger 50 kg, klamrar sig fast och ryckes med repet rakt uppåt. Hur stor är hans hastighet i det ögonblick, då stenen når marken? $g = 9{,}8$ m/sek^2.
4. Genom ett horisontellt glasrör rinner en vattenström. Varje minut utströmmar 84 cm^3 vatten ur röret. Vattnets temperatur vid inträdet i röret är 15,5° C, men på ett ställe i röret passerar det förbi en elektrisk uppvärmningsspole, och till följd härav har temperaturen vid utträdet ur röret stigit till 21,0° C. Hur stor värmemängd alstras per sek i uppvärmningsspolen? Värmeförlusterna till rörets omgivning kunna lämnas ur räkningen.
5. En glödlampa för 6 volt och 25 watt användes som reservbelysning i ett skyddsrum. Den är ansluten till ett ackumulatorbatteri, som kan ge elektricitetsmängden 30 ampèretimmar. Hur länge kan lampan hållas lysande, innan batteriet måste omladdas?
6. En shuntmotor för likström drives av en shuntgenerator. Maskinerna äro förbundna med två ledningar, som vardera ha 160 m längd med ett motstånd av 1/800 Ω per m. Generatorns polspänning är 90 V, och den lämnar en ström av 25 A. Vad visar en voltmeter, som är inkopplad mellan motorns poler? Voltmetern har stort motstånd, och man behöver därför inte taga hänsyn till dess strömförbrukning.
7. Till en väggkontakt för 220 V likström anslutas två seriekopplade motstånd. Det ena har motståndet 93 Ω. Det andra ligger omkring 20 Ω; ohmtalet är inte exakt bekant, men man vet, att det inte skiljer sig från det nämnda värdet med mer än ett eller annat ohm. Man vill mäta spänningen mellan det mindre motståndets ändpunkter och har att tillgå en voltmeter för maximalt 50 V. Räcker voltmetern till för den spänning, som skall mätas? Voltmeterns eget motstånd antages vara mycket stort.

8. En lokal kan uppvärmas antingen med elektrisk energi eller med gas. Den elektriska energien förvandlas helt och hållet till värme, men av gasens förbränningsvärme kan blott 60 % tillgodogöras för uppvärmning. Gasen kostar 16 öre per m^3, och dess förbränningsvärme är 4500 kcal per m^3. Vid vilket pris per kWh blir det lika billigt i drift att uppvärma lokalen med elektrisk energi som med gas? 1 W = 0,24 cal/sek.

Resultat: **1.** 3850 kg. **2.** 100 kgf. **3.** 3,25 m/sek. **4.** 7,7 cal/sek. **5.** 7,2 tim. **6.** 80 V. **7.** Voltmetern räcker till, om motståndet är mindre än 27,4 Ω. **8.** 5,12 öre/kWh.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. En enkelgängad skruv har kvadratisk gängprofil samt 4 mm gängdjup. Hur stort tryck kan åstadkommas med denna skruv i en handpress, om skruven kringvrides med en vev, vars radie är 400 mm? Kraften i handen antages vara 25 kgf och skruvens verkningsgrad 40 %.
2. Vid en fyrtakts förbränningsmotor har stora kugghjulet i kuggväxeln mellan vevaxel och kamaxel sprängts så fullständigt, att det icke kan rekonstrueras. Det mindre kugghjulet kan däremot fullständigt uppmätas, varvid man finner, att dess kuggantal är 30 st. och modulen 5. Beräkna det söndersprängda stora kugghjulets kuggantal och delningsdiameter.
3. En 4 m lång behållare av plåt av 3 m^3 rymd skall beräknas för ett övertryck av 7 kgf/cm^2. Hur tjock bör plåten vara, om högsta tillåtna dragspänningen är 550 kgf/cm^2?
4. En 1″ bult gängas med standardgängan W1″. Hur många procent försvagas därvid bultens hållfasthet mot dragning?
5. En mätning av vattenföringen i ett vattenfall gav följande medelvärden per månad:

januari	100	m^3/sek	juli	175	m^3/sek
februari	150	»	augusti	175	»
mars	175	»	september	140	»
april	300	»	oktober	120	»
maj	250	»	november	85	»
juni	200	»	december	85	»

a) Rita ett diagram, som visar vattenföringens växlingar under året.

b) Beräkna och inrita i diagrammet medelvattenföringen under året.

c) Hur stor medeleffekt i kW kan uttagas, då fallet utbygges, om nettofallhöjden är 12,5 m? Turbinverkningsgraden är 87 %, generatorverkningsgraden 95 %.

6. Avståndet mellan de 3,5 m långa sparrarna i en takstol med 45° lutning skall vara 1,2 m. Den totala (vertikala) belastningen på taket är 200 kg per m^2 takyta. Tillåten böjningspåkänning är 80 kgf/cm^2. Beräkna sparrarnas tvärsnitt, om b : h = 1 : 2. Sparrarna kunna anses fritt upplagda vid ändarna.
7. Rita en schematisk vertikal tvärsektion genom en fyrtakts förgasarmotor. Gör därefter en kortfattad beskrivning över de konstruktionsdetaljer, som måste bort, och vilka nya som komma till, när konstruktionen skall omarbetas till en fyrtakts dieselmotor.

Resultat: **1.** 3,14 tf. **2.** 60 st. kuggar; 300 mm diam. **3.** 6,5 mm. **4.** 29,5 %. **5.** b) 163 m^3/s; c) 16 500 kW. **6.** Höjd 16 cm, bredd 8 cm.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1946: 1—2.

Ur innehållet: K. G. Malmquist, Nyare undersökningar över de mörka nebulosornas avstånd; B. Lindblad, Den kosmiska utvecklingens tidsskala; T. Elvius, Kapteyns selected areas och något om deras betydelse för stellarastronomien; Å. Wallenquist, Den holländska astronomien under ockupationen; C. Schalén, Ljuskurvan för Nova Aquilæ 1945; A. D. Lindhed, Ett bekvämt spegelteleskop; Notiser.

Svensk kemisk tidskrift, 1946: 2—4.

Ur innehållet: G. Aminoff, Grafisk framställning av kärnarternas relativa frekvens i jordskorpan; A. Öhlander and O. Adelsohn, The Complex Formation in a Photographic Fixing Bath; H. Suomalainen and L. Jännes, Dehydrogenation of Pyruvic Acid As Condition for the Fermentative Formation of Acetylmethylcarbinol; L. G. Sillén and G. Infeldt, Electrometric Investigation of Equilibria between Mercury and Halogen Ions; T. Timell, Betingelserna för elektrolytisk oxidation av stearinsyra; S. Sunner, Determination of Combustion Heats of Organosulphur Compounds; H. Willstaedt, Über zwei neue lipoidlösliche Farbstoffe aus dem echten Reizker; I. Ehrenberg, I. Fischer and N. Löfgren, Complexes between Penicellin and Diphteria Toxin; K. J. Karrman, On the Preparation of Arylated 3-Aminoretene; T. Canbäck, Studies on the Reaction between Aromatic Nitro Compounds and Active Methylene Groups; G. Infeldt and L. G. Sillén, On Complexes of Mercury with Nitrate and Sulfate Ions.

Fysisk Tidsskrift, København 1945: 5—6.

Ur innehållet: J. N. Brønsted, Energitransformationen og den klassiske Thermodynamik; J. N. Brønsted, Om Grundlaget for Energetiken; S. Høffer Jensen, Om Betatronen; E. Strömgren, Om Ole Rømer og Lysets endelige Hastighed.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1945: 4, 1946: 1—2.

Ur innehållet: E. Strömgren, De kortperiodiske Kometer og Hypotesen om deres Indfangning ved de store Planeter; V. Duer, Et nyt astronomisk Præcisionsur med fritsvingende Maalependul; Solformørkelsen den 9 Juli 1945: Notiser om Köpenhamns Uppsala, Lunds och Stockholms observatoriers expeditioner samt om Overassistent Aage Nielsens exp. till Skelleftehamn; J. K. Bøggild, Om Atomenergiens Frigørelse; Tabeller for Kalendarierne for Aarene fra 1701 til 2000; H. Spencer Jones, Edmond Halley og hans Tid; Julie M. Vinter Hansen, Liv og Arbejde paa Lick-Observatoriet; Konstellationer i Juni—Nov. 1946; Stjernetid i Midnat Verdenstid; Notiser.

Naturens Verden, København 1945: 7—10.

Ur innehållet: E. Asmussen og M. Nielsen, Træk af Flyvningens Fysiologi; H. Rønne, Brilleglasset og dets Form; A. Fleming, Penicillinets Historie og Udvikling; S. Løvtrup, Nogle træk af de autotrofe svovlbakteriers biokemi; H. Mortensen, Tycho Brahe og Kapuzinerne i Prag.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1946: 1.

Ur innehållet: Th. Skolem, Den rekursive aritmetikk; E. Götlind, Några satser om antalet grupper av ordningen pq^r; K. L. Sundet, Om en konstruksjon av rasjonale kurver av 3. klasse; Oppgaver til løsning; Løste oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1946: 1.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, Nobelpristagere i fysikk: Max v. Laue, William Henry Bragg, William Lawrence Bragg, Charles Glover Barkla; N. Arley, Nyere Undersøgelser over den kosmiske Staaling; J. Knudsen, Om bestemmelse av det effektivt mulige antall solskinnstimer ved kupert horisont; K. A. Wingårdh, Röntgenstrålarna under 50 år.

Populær Astronomi (Norsk populær-astronomisk Tidsskrift), Oslo, 1946: 1.

Ur innehållet: S. Rosseland, Stjernetelling; L. Owren, Nye forestillinger om spiraltåkernes struktur; J. V. Garwick, Månens bevegelse; Notiser: Slipning av elliptiske planspeil, Norske amatørkikkerter.

Naturen, Bergen 1946: 2—5.

Ur innehållet: K. Langlo, Nye tekniske hjelpemidler i meteorologien; S. Einbu, Kometer; O. A. Høeg, Penicillin; O. Bjørgum og J. M. Fjordholm, Statistiske nedbørsspådommer; I. Ruud, Astronomen og universet; H. Bjørlykke, Våre teknisk viktige metaller og deres opptreden i naturen; L. Harang, Virkningen av solformørkelsen 9. juli 1945 på jonosfæren.

T. Hagren

Övningsexempel i matematik

För realskolor, kommunala mellanskolor och motsvarande läroanstalter. Med facit. Kr 2: 10

Carl-Erik Lind

Övningsuppgifter i specialmatematik

Med facit. Kr. 1: 25

Bengt Lindwall

Övningsexempel i matematik för realgymnasiet

I. För ring I^3, II^4. Med facit. Kr 1: 25
II. För ring II^3, III^4. Med facit. Kr 1: 25
III. För ring III^3, IV^4. Med facit. Kr 1: 25

Thor Westling

Övningsexempel i matematik för realskolans högsta klass

Kr 0: 90

Frits Wigforss

Matematisk statistik för pedagoger

2:a uppl. Kr. 4: 50

Einar Öije

Läraren, lärjungen, allmänheten

En lärares funderingar. Kr 1: 85

Inom kort utkommer:

Orvar Josephsson

Hur man sköter sin ekonomi

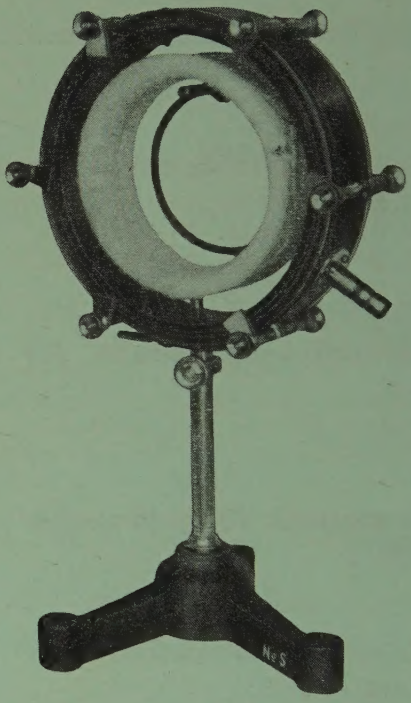
Kr 2: 75

SVENSKA BOKFÖRLAGET

FYSIKALISKA APPARATER

från

NORSTEDTS



Wilson-Wulfs apparat för demonstration av α-partiklars banor

kan åter levereras vid höstterminens början. Då tillverkningspartiet är begränsat tillrådes att insända rekvisition omgående

Pris 140:- kr.

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen Stockholm

LUND 1946, HÅKAN OHLSSONS BOKTR.